

Schadenreservierung: Grundlagen und chain-ladder

Am Ende eines Geschäftsjahres sind meist nicht alle Schäden, die in diesem Geschäftsjahr eingetreten sind, abschließend reguliert; diese Schäden werden als *Spätschäden* bezeichnet. Spätschäden entstehen aus zwei Gründen:

- Ein Schaden ist entstanden, aber noch nicht gemeldet (IBNR = *incurred but not reported*).
- Ein Schaden ist gemeldet, aber die Höhe des Schadens lässt sich noch nicht bestimmen; daher ist die für die Regulierung dieses Schadens gebildete *Einzelschadenreserve* unter Umständen nicht ausreichend (IBNER = *incurred but not enough reserved*).

Das Problem der Spätschäden stellt sich grundsätzlich in allen Versicherungszweigen, insbesondere aber in der Haftpflichtversicherung: Man denke etwa an einen Konstruktionsfehler bei einer Brücke, der erst nach deren Einsturz erkannt wird, oder an einen Personenschaden mit einem ungewissen Verlauf der Heilung. In verschärfter Form stellt sich das Problem der Spätschäden für den Rückversicherer bei einer Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung, weil ein Schaden dem Rückversicherer erst dann gemeldet wird, wenn zu erwarten ist, dass die Schadenhöhe die Priorität überschreitet.

Zur Einhaltung seines Leistungsversprechens ist der Versicherer verpflichtet, für die im abgelaufenen Geschäftsjahr entstandenen Spätschäden eine Reserve zu bilden; diese Reserve ist im Grunde nichts anderes als eine Prämie für die Selbstversicherung gegen Spätschäden. Wie jede andere Prämie auch sollte die Reserve im Interesse der Versicherten ausreichend sein; andererseits sollte sie im Interesse der Allgemeinheit, der die Steuern aus Gewinnen zugute kommen, nicht zu hoch bemessen sein.

Neben der Bestimmung der Reserve für das gerade abgelaufene Geschäftsjahr ist auch die Aktualisierung der Reserven für weiter zurückliegende Geschäftsjahre von Bedeutung. Wie wichtig die Bestimmung von Reserven ist, zeigt sich auch daran, dass die Gesamtreserve, also die Summe der Reserven für alle abgelaufenen Geschäftsjahre, die Prämieinnahme eines Geschäftsjahres übersteigen kann.

13.1 Abwicklungsdreiecke

Im folgenden nehmen wir an, dass die Geschäftsjahre mit den Kalenderjahren übereinstimmen; wir sprechen daher kurz von *Jahren*.

Jeder Schaden hat eine Geschichte:

- Der Schaden entsteht in einem *Anfalljahr*.
- Der Schaden wird dem Versicherer gemeldet.
- Der Versicherer leistet erste Zahlungen und bildet für eventuell erforderliche weitere Zahlungen eine *Einzelschadenreserve* (*case reserve*).
- Der Schaden wird abschließend reguliert.

Die Regulierung eines einzelnen Schadens, und damit erst recht die Regulierung aller Schäden aus einem Anfalljahr, kann sich über mehrere *Abwicklungsjahre* erstrecken.

Grundlage für die Bestimmung von Reserven für einen Bestand von Risiken ist das *Abwicklungsdreieck*, in dem für jedes Anfalljahr und jedes Abwicklungsjahr

- die Zahl der gemeldeten Schäden,
- die Zahl der abschließend regulierten Schäden,
- die Summe aller geleisteten Zahlungen (*paid*), oder
- der Schadenaufwand (*incurred*)

dargestellt wird; dabei ist der *Schadenaufwand* als die Summe aller geleisteten Zahlungen zuzüglich der Einzelschadenreserven definiert. Das Abwicklungsdreieck kann Zuwächse oder Schadenstände darstellen; dabei sind

- *Zuwächse* inkrementelle Daten aus dem jeweiligen Anfalljahr und
- *Schadenstände* kumulative Daten, die sich durch Summation der Zuwächse aus dem jeweiligen und den vorangehenden Anfalljahren ergeben.

Zur Vereinfachung interpretieren wir die Daten eines Abwicklungsdreiecks in diesem Kapitel als geleistete Zahlungen.

13.1.1 Beispiel (Abwicklungsdreieck für Zuwächse). Unmittelbar nach dem Ende des Jahres 2005 liegt das folgende Abwicklungsdreieck für die für Schäden aus den Anfalljahren 2000–2005 in den einzelnen Abwicklungsjahren geleisteten Zahlungen (in Tausend Euro) vor:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr					
	2000	2001	2002	2003	2004	2005
2000	1001	854	568	565	347	148
2001		1113	990	671	648	422
2002			1265	1168	800	744
2003				1490	1383	1007
2004					1725	1536
2005						1889

Für Schäden aus dem Anfalljahr 2003 wurden also noch im selben Jahr 1.490.000 € und in den folgenden Abwicklungsjahren 1.383.000 € bzw. 1.007.000 € gezahlt.

Das Abwicklungsdreieck wird etwas aussagekräftiger, wenn die Abwicklungsjahre nicht als Kalenderjahre, sondern als Verzögerungen in Bezug auf die Anfalljahre und damit als *relative Abwicklungsjahre* notiert werden:

13.1.2 Beispiel (Abwicklungsdreieck für Zuwächse). Durch den Übergang von absoluten zu relativen Abwicklungsjahren erhält man das folgende Abwicklungsdreieck:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
2000	1001	854	568	565	347	148
2001	1113	990	671	648	422	
2002	1265	1168	800	744		
2003	1490	1383	1007			
2004	1725	1536				
2005	1889					

Die im Jahr 2005 für die Anfalljahre 2000–2005 geleisteten Zahlungen sind jetzt auf der Hauptdiagonalen dargestellt.

In dieser Form lässt das Abwicklungsdreieck erkennen, ob die bisher geleisteten Zahlungen einen Trend in den Anfalljahren oder ein bestimmtes Muster in den Abwicklungsjahren aufweisen. Daraus ergeben sich erste Hinweise auf die Höhe der zukünftigen Zahlungen und damit auf die erforderliche Reserve.

Schließlich ist es im Hinblick auf die mathematische Behandlung der Schadenreservierung von Vorteil, die Anfalljahre in gleicher Weise wie die Abwicklungsjahre und damit als *relative Anfalljahre* zu bezeichnen:

13.1.3 Beispiel (Abwicklungsdreieck für Zuwächse). Durch den Übergang von absoluten zu relativen Anfalljahren erhält man das folgende Abwicklungsdreieck:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

Dieses Abwicklungsdreieck enthält die Zahlungen in den relativen Abwicklungsjahren für die relativen Anfalljahre.

In dieser Darstellung bezeichnen wir $i + k$ mit $i, k \in \{0, 1, \dots, 5\}$ als *relatives Kalenderjahr*. Das relative Kalenderjahr ist auf jeder aufsteigenden Diagonalen konstant.

Wir bezeichnen

$$S_{i,n-i}$$

als *letzten beobachtbaren Schadenstand* oder als *aktuellen Schadenstand* und

$$S_{i,n}$$

als *Endschadenstand* aus dem Anfalljahr i . Mit Ausnahme des Anfalljahres $i = 0$ sind die Endschadenstände nicht beobachtbar. Ergänzt man das Abwicklungsdreieck der beobachtbaren Schadenstände um die nicht beobachtbaren zukünftigen Schadenstände, so erhält man das *Abwicklungsquadrat* für Schadenstände.

13.2.2 Beispiel (Abwicklungsdreieck für Schadenstände). Das Abwicklungsdreieck

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	3261				
5	1889					

wird jetzt als eine Realisation des Abwicklungsdreiecks der beobachtbaren Schadenstände mit $n = 5$ verstanden.

Das Problem der Schadenreservierung besteht darin,

- die nicht beobachtbaren Schadenstände oder Zuwächse zu prognostizieren bzw.
- deren Erwartungswerte zu schätzen.

Von besonderem Interesse ist dabei die Prognose der *Endschadenstände* $S_{i,n}$ bzw. die Schätzung ihrer Erwartungswerte.

13.3 Das chain-ladder Verfahren

Das chain-ladder Verfahren ist ein heuristisches Verfahren zur Prognose der nicht beobachtbaren Schadenstände bzw. zur Schätzung ihrer Erwartungswerte und damit zur Bestimmung von Reserven.

13.3.1 Bemerkung. Das chain-ladder Verfahren erfordert Divisionen, die natürlich nur dann durchführbar sind, wenn der Nenner des entsprechenden Bruches von Null verschieden ist. Aus Gründen der Darstellung verzichten wir darauf, Bedingungen anzugeben, unter denen alle Divisionen durchführbar

sind. In der Praxis liegt ohnehin immer nur eine Realisation des Abwicklungsdreiecks vor, und für diese Realisation ist das chain-ladder Verfahren durchführbar oder eben nicht.

Für jedes Anfalljahr $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir den *empirischen individuellen Abwicklungsfaktor*

$$F_{i,k} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}$$

Die empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren sind für $i + k \leq n$ beobachtbar und für $i + k > n$ nicht beobachtbar.

13.3.2 Beispiel. Aus dem Abwicklungsdreieck für Schadenstände ergibt sich für den empirischen individuellen Abwicklungsfaktor für das Anfalljahr 3 und das Abwicklungsjahr 2 die Realisation

$$F_{3,2}(\omega) = \frac{3880}{2873} \approx 1,351$$

Insgesamt erhält man für die Realisationen der beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren das folgende Ergebnis:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0		1,853	1,306	1,233	1,116	1,044
1		1,889	1,319	1,234	1,123	
2		1,923	1,329	1,230		
3		1,928	1,351			
4		1,890				
5						

Die beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren eines Abwicklungsjahres unterscheiden sich nur unwesentlich voneinander.

Mit Hilfe der empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren lassen sich die nicht beobachtbaren Schadenstände in der Form

$$S_{i,k} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k F_{i,l}$$

darstellen; dabei ist $S_{i,n-i}$ der letzte beobachtbare Schadenstand des Anfalljahres i .

Das *chain-ladder Verfahren* besteht aus zwei Schritten:

– Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ wird der *chain-ladder Faktor*

$$\hat{\varphi}_k^{\text{CL}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

gebildet.

- Für jedes Anfalljahr $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und jedes Abwicklungsjahr $k \in \{n-i, \dots, n\}$ wird aus dem letzten beobachtbaren Schadenstand und den chain-ladder Faktoren der zukünftigen Abwicklungsjahre der *chain-ladder Schätzer*

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}}$$

für den erwarteten Schadenstand $E[S_{i,k}]$ gebildet. Es gilt $\widehat{S}_{i,n-i}^{\text{CL}} = S_{i,n-i}$.
Wegen

$$\widehat{\varphi}_k^{\text{CL}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \frac{S_{j,k}}{S_{j,k-1}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} F_{j,k}$$

ist jeder chain-ladder Faktor ein gewichtetes Mittel der beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren des betreffenden Abwicklungsjahres. Darüber hinaus ist zu bemerken, dass die Definition der chain-ladder Schätzer der Gleichung

$$S_{i,k} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k F_{i,l}$$

nachgebildet ist.

13.3.3 Beispiel. Aus dem Abwicklungsdreieck für Schadenstände

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	3261				
5	1889					

ergeben sich für die chain-ladder Faktoren der letzten Abwicklungsjahre die Realisationen

$$\widehat{\varphi}_5^{\text{CL}}(\omega) = \frac{3483}{3335} \approx 1,044$$

$$\widehat{\varphi}_4^{\text{CL}}(\omega) = \frac{3335 + 3844}{2988 + 3422} \approx 1,120$$

$$\widehat{\varphi}_3^{\text{CL}}(\omega) = \frac{2988 + 3422 + 3977}{2423 + 2774 + 3233} \approx 1,232$$

Daraus ergeben sich für die chain-ladder Schätzer der erwarteten Schadenstände des Anfalljahres 3 die Realisationen

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{3,3}^{\text{CL}}(\omega) &\approx 3880 \times 1,232 \approx 4781 \\ \widehat{S}_{3,4}^{\text{CL}}(\omega) &\approx 4781 \times 1,120 \approx 5354 \\ \widehat{S}_{3,5}^{\text{CL}}(\omega) &\approx 5354 \times 1,044 \approx 5592 \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man das folgende Ergebnis:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	4015
2	1265	2433	3233	3977	4454	4652
3	1490	2873	3880	4781	5354	5592
4	1725	3261	4333	5339	5980	6245
5	1889	3588	4768	5875	6579	6871
$\widehat{\varphi}_k^{\text{CL}}(\omega)$	1,899	1,329	1,232	1,120	1,044	

Hier sind die Realisationen der chain-ladder Schätzer für $i+k > n$ in geneigter Schrift gesetzt.

Für $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird die Differenz

$$\widehat{R}_i^{\text{CL}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{CL}} - S_{i,n-i}$$

als *chain-ladder Reserve* für das Anfalljahr i bezeichnet. Es gilt $\widehat{R}_0^{\text{CL}} = 0$. Die Summe

$$\widehat{R}^{\text{CL}} := \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i^{\text{CL}}$$

wird als *chain-ladder Gesamtreserve* bezeichnet.

13.3.4 Beispiel. Für die Realisation der chain-ladder Reserve für das Anfalljahr 3 gilt

$$\widehat{R}_3^{\text{CL}}(\omega) = 5592 - 3880 = 1712$$

Insgesamt erhält man für die Realisationen der beobachtbaren Schadenstände, der chain-ladder Schätzer und der chain-ladder Reserven die folgende Tabelle:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						Reserve
	0	1	2	3	4	5	
0						3483	0
1					3844	4015	171
2				3977		4652	675
3			3880			5592	1712
4		3261				6245	2984
5	1889					6871	4982
Summe							10524

Die chain-ladder Gesamtreserve beträgt also 10.524.000 €.

Aufgabe

13.3.A Berechnen Sie für die Daten aus dem Beispiel

- für jedes Abwicklungsjahr den chain-ladder Faktor nach der Definition und als gewichtetes Mittel der beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren sowie
- für jedes Anfalljahr die chain-ladder Schätzer der erwarteten zukünftigen Schadenstände.

Vergleichen Sie die chain-ladder Faktoren mit den arithmetischen Mitteln der beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren.

13.4 Das grossing-up Verfahren

Bei der Berechnung der chain-ladder Schätzer für die erwarteten Endscha-denstände ergeben sich als Zwischenergebnisse notwendigerweise die chain-ladder Schätzer für die Erwartungswerte *aller* nicht beobachtbaren Schadenstände des betreffenden Anfalljahres. Diese zusätzliche Information ist von Interesse, wenn man die chain-ladder Reserve im Hinblick auf die Planung von Kapitalanlagen auf die zukünftigen Kalenderjahre aufteilen möchte (*asset-liability management*).

Wir betrachten nun ein Verfahren, bei dem die erwarteten Endscha-denstände ohne die Schätzung der Erwartungswerte der übrigen nicht beobachtbaren Schadenstände des betreffenden Anfalljahres *direkt* geschätzt werden. Dieses Verfahren ist das grossing-up Verfahren.

13.4.1 Bemerkung. Wie das chain-ladder Verfahren erfordert auch das grossing-up Verfahren Divisionen, und wir verzichten darauf, Bedingungen anzugeben, unter denen alle Divisionen durchführbar sind.

Das *grossing-up Verfahren* ist ein *rekursives* Verfahren. Es besteht darin, dass für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ zunächst

- die *grossing-up Quote*

$$\hat{\gamma}_{n-i}^{\text{GU}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{i-1} S_{j,n-i}}{\sum_{j=0}^{i-1} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}} & \text{sonst} \end{cases}$$

und sodann

- der *grossing-up Schätzer*

$$\hat{S}_{i,n}^{\text{GU}} := \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\text{GU}}}$$

für den erwarteten Endscha-denstand $E[S_{i,n}]$ gebildet wird. Es gilt $\hat{S}_{0,n}^{\text{GU}} = S_{0,n}$.

Für $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird die Differenz

$$\widehat{R}_i^{\text{GU}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{GU}} - S_{i,n-i}$$

als *grossing-up Reserve* für das Anfalljahr i bezeichnet. Es gilt $\widehat{R}_0^{\text{GU}} = 0$. Die Summe

$$\widehat{R}^{\text{GU}} := \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i^{\text{GU}}$$

wird als *grossing-up Gesamtreserve* bezeichnet.

13.4.2 Beispiel. Aus dem Abwicklungsdreieck für Schadenstände

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	3261				
5	1889					

ergeben sich für die grossing-up Quoten der letzten Abwicklungsjahre und für die grossing-up Schätzer der ersten Anfalljahre die Realisationen

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_5^{\text{GU}}(\omega) &= 1,000 & \widehat{S}_{0,n}^{\text{GU}}(\omega) &= \frac{3483}{1,000} = 3483 \\ \widehat{\gamma}_4^{\text{GU}}(\omega) &= \frac{3335}{3483} \approx 0,958 & \widehat{S}_{1,n}^{\text{GU}}(\omega) &\approx \frac{3844}{0,958} \approx 4015 \\ \widehat{\gamma}_3^{\text{GU}}(\omega) &\approx \frac{2988 + 3422}{3483 + 4015} \approx 0,855 & \widehat{S}_{2,n}^{\text{GU}}(\omega) &\approx \frac{3977}{0,855} \approx 4652 \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man das folgende Ergebnis:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						Reserve
	0	1	2	3	4	5	
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483	0
1	1113	2103	2774	3422	3844	4015	171
2	1265	2433	3233	3977		4652	675
3	1490	2873	3880			5592	1712
4	1725	3261				6245	2984
5	1889					6871	4982
$\widehat{\gamma}_k^{\text{GU}}(\omega)$	0,275	0,522	0,694	0,855	0,958	1,000	
Summe							10524

Die grossing-up Gesamtreserve beträgt also 10.524.000 €.

Die in den Beispielen 13.3.2 und 13.4.2 berechneten Realisationen der chain-ladder Schätzer und der grossing-up Schätzer für die erwarteten Endschadenstände sind identisch. Es wird sich zeigen, dass dies kein Zufall ist.

Das folgende Lemma stellt eine wichtige Beziehung zwischen den grossing-up Quoten und den chain-ladder Faktoren her:

13.4.3 Lemma. Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\hat{\gamma}_{k-1}^{\text{GU}} \hat{\varphi}_k^{\text{CL}} = \hat{\gamma}_k^{\text{GU}}$$

Beweis. Im Fall $k = n$ gilt

$$\hat{\gamma}_{n-1}^{\text{GU}} \hat{\varphi}_n^{\text{CL}} = \frac{S_{0,n-1}}{S_{0,n}} \frac{S_{0,n}}{S_{0,n-1}} = 1 = \hat{\gamma}_n^{\text{GU}}$$

Sei nun $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{S_{n-k,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}} &= \frac{S_{n-k,k}}{\sum_{j=0}^{n-k-1} S_{j,k} + S_{n-k,k}} \\ &= \frac{\hat{S}_{n-k,n}^{\text{GU}} \hat{\gamma}_k^{\text{GU}}}{\left(\sum_{j=0}^{n-k-1} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}\right) \hat{\gamma}_k^{\text{GU}} + \hat{S}_{n-k,n}^{\text{GU}} \hat{\gamma}_k^{\text{GU}}} \\ &= \frac{\hat{S}_{n-k,n}^{\text{GU}}}{\sum_{j=0}^{n-k} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}} \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}} = 1 - \frac{S_{n-k,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}} = 1 - \frac{\hat{S}_{n-k,n}^{\text{GU}}}{\sum_{j=0}^{n-k} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}}{\sum_{j=0}^{n-k} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{k-1}^{\text{GU}} \hat{\varphi}_k^{\text{CL}} &= \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}{\sum_{j=0}^{n-k} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}} \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k-1} \hat{S}_{j,n}^{\text{GU}}} \\ &= \hat{\gamma}_k^{\text{GU}} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

13.4.4 Satz. Für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt

$$\widehat{S}_{i,n}^{\text{GU}} = \widehat{S}_{i,n}^{\text{CL}}$$

Beweis. Aus Lemma 13.4.3 ergibt sich durch vollständige Induktion für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\prod_{l=n-i+1}^n \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}} = \frac{1}{\widehat{\gamma}_{n-i}^{\text{GU}}}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Aufgrund des Satzes stimmen die grossing–up Schätzer und die chain–ladder Schätzer für die erwarteten Endschadenstände überein.

Das grossing–up Verfahren lässt sich erweitern, indem für jedes Anfalljahr $i \in \{1, \dots, n\}$ und jedes Abwicklungsjahr $k \in \{n-i, \dots, n-1\}$ durch

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{GU}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{GU}} \widehat{\gamma}_k^{\text{GU}}$$

der *grossing–up Schätzer* für den erwarteten Schadenstand $E[S_{i,k}]$ definiert wird. Es lässt sich zeigen, dass auch diese grossing–up Schätzer mit den entsprechenden chain–ladder Schätzern übereinstimmen; vgl. Aufgabe 13.4.A.

Aufgaben

- 13.4.A** Zeigen Sie, dass für jedes Anfalljahr $i \in \{1, \dots, n\}$ und jedes Abwicklungsjahr $k \in \{n-i, \dots, n-1\}$ der grossing–up Schätzer mit dem chain–ladder Schätzer für den erwarteten Schadenstand $E[S_{i,k}]$ übereinstimmt.
- 13.4.B** Berechnen Sie für die Daten aus dem Beispiel die grossing–up Quoten und die grossing–up Schätzer aller erwarteten zukünftigen Schadenstände.

13.5 Das Marginalsummen–Verfahren

Das chain–ladder Verfahren ist ohne Zweifel plausibel. Dennoch stellt sich die Frage, ob es, unter geeigneten Annahmen an die gemeinsame Verteilung aller Zuwächse, mit allgemeinen Prinzipien der Statistik vereinbar ist.

In diesem Abschnitt betrachten wir, in Analogie zum multiplikativen Modell der Tarifierung, das multiplikative Modell der Schadenreservierung, in dem nur die Struktur der erwarteten Zuwächse festgelegt wird:

Das multiplikative Modell der Schadenreservierung: *Es gibt Familien von Parametern*

$$\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

mit

$$\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$$

derart, dass für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E[Z_{i,k}] = \alpha_i \vartheta_k$$

gilt.

Aus der Normierungsbedingung ergibt sich eine Interpretation der Parameter: Zunächst ergibt sich durch Summation für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E[S_{i,n}] = \alpha_i$$

und daraus folgt, dass jeder der erwarteten Zuwächse $E[Z_{i,k}]$ proportional zum erwarteten Endschadenstand α_i des Anfalljahres i ist und der Proportionalitätsfaktor ϑ_k nur vom Abwicklungsjahr k abhängt.

Wir nehmen im gesamten Abschnitt an, dass die Annahmen des multiplikativen Modells erfüllt sind.

Durch Summation ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n-i} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{k=0}^{n-i} E[Z_{i,k}] \quad \text{für alle } i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{i=0}^{n-k} E[Z_{i,k}] \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$$

Diese Gleichungen legen die folgende Definition nahe:

Zwei Familien von Zufallsvariablen

$$\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

heißen *Marginalsummen-Schätzer* für die Familien

$$\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

der Parameter des multiplikativen Modells, wenn sie die *Marginalsummen-*

Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n-i} \widehat{\alpha}_i \widehat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k} \quad \text{für alle } i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} \widehat{\alpha}_i \widehat{\vartheta}_k = \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k} \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

und die Nebenbedingung

$$\sum_{k=0}^n \widehat{\vartheta}_k = 1$$

erfüllen. Bei den Marginalsummen-Gleichungen ist zu beachten, dass sich die Summation nur über die *beobachtbaren* Zuwächse eines Anfalljahres bzw. eines Abwicklungsjahres erstreckt.

Es stellt sich heraus, dass die Marginalsummen-Gleichungen unter der Nebenbedingung eine eindeutige und zudem überraschende Lösung besitzen. Wir benötigen das folgende Lemma:

13.5.1 Lemma. *Für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt*

$$\sum_{j=0}^i \widehat{S}_{j,n}^{\text{CL}} = \left(\sum_{j=0}^i S_{j,n-i} \right) \prod_{l=n-i+1}^n \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}}$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Im Fall $i = 0$ ergibt sich die Behauptung aus

$$\widehat{S}_{0,n}^{\text{CL}} = S_{0,n}$$

Wir nehmen nun an, die Gleichung sei für $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ bereits gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{i+1} \widehat{S}_{j,n}^{\text{CL}} &= \sum_{j=0}^i \widehat{S}_{j,n}^{\text{CL}} + \widehat{S}_{i+1,n}^{\text{CL}} \\ &= \left(\sum_{j=0}^i S_{j,n-i} \right) \prod_{l=n-i+1}^n \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}} + S_{i+1,n-i-1} \prod_{l=n-i}^n \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}} \\ &= \left(\sum_{j=0}^i S_{j,n-i-1} \right) \widehat{\varphi}_{n-i}^{\text{CL}} \prod_{l=n-i+1}^n \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}} + S_{i+1,n-i-1} \prod_{l=n-i}^n \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{i+1} S_{j,n-i-1} \right) \prod_{l=n-i}^n \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}} \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

13.5.2 Satz. Seien $\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ und $\{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ Familien von Zufallsvariablen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) $\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ und $\{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ sind Marginalsummen-Schätzer für $\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ und $\{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$.
 (b) Für alle $i \in \{0,1,\dots,n\}$ gilt

$$\hat{\alpha}_i = \hat{S}_{i,n}^{\text{CL}}$$

und für alle $i \in \{0,1,\dots,n\}$ gilt

$$\hat{\vartheta}_k = \begin{cases} \prod_{l=1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} & \text{falls } k = 0 \\ \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} - \prod_{l=k}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere existieren eindeutig bestimmte Marginalsummen-Schätzer, und die Marginalsummen-Schätzer der erwarteten Endschadenstände stimmen mit den chain-ladder Schätzern überein.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass (a) gilt, und führen den Beweis durch vollständige Induktion über $i \in \{0,1,\dots,n\}$.

Im Fall $i = 0$ folgt aus den Marginalsummen-Gleichungen und der Nebenbedingung zunächst

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\sum_{k=0}^n Z_{0,k}}{\sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k} = \sum_{k=0}^n Z_{0,k} = S_{0,n} = \hat{S}_{0,n}^{\text{CL}}$$

und sodann

$$\hat{\vartheta}_n = \frac{Z_{0,n}}{\hat{\alpha}_0} = \frac{Z_{0,n}}{\hat{S}_{0,n}^{\text{CL}}} = \frac{S_{0,n} - S_{0,n-1}}{S_{0,n}} = 1 - \frac{1}{\hat{\varphi}_n^{\text{CL}}}$$

Sei nun $i \in \{1,\dots,n\}$. Wir nehmen an, die Gleichungen

$$\hat{\alpha}_j = \hat{S}_{j,n}^{\text{CL}}$$

und

$$\hat{\vartheta}_{n-j} = \prod_{l=n-j+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} - \prod_{l=n-j}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}}$$

seien für alle $j \in \{0,1,\dots,i-1\}$ bereits gezeigt. Dann gilt

$$1 - \sum_{k=n-i+1}^n \hat{\vartheta}_k = \prod_{l=n-i+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}}$$

und daraus ergibt sich zunächst

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}}{\sum_{k=0}^{n-i} \hat{\vartheta}_k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}}{1 - \sum_{k=n-i+1}^n \hat{\vartheta}_k} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^n \hat{\varphi}_l^{\text{CL}} = \hat{S}_{i,n}^{\text{CL}}$$

Für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ergibt sich nun mit Lemma 13.5.1

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_{n-i} &= \frac{\sum_{j=0}^i Z_{j,n-i}}{\sum_{j=0}^i \hat{\alpha}_j} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^i Z_{j,n-i}}{\sum_{j=0}^i \hat{S}_{j,n}^{\text{CL}}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^i S_{j,n-i} - \sum_{j=0}^i S_{j,n-i-1}}{(\sum_{j=0}^i S_{j,n-i}) \prod_{l=n-i+1}^n \hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\hat{\varphi}_{n-i}^{\text{CL}}}\right) \prod_{l=n-i+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} \\ &= \prod_{l=n-i+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} - \prod_{l=n-i}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} \end{aligned}$$

und für $i = n$ ergibt sich mit Lemma 13.5.1

$$\hat{\vartheta}_0 = \frac{\sum_{j=0}^n Z_{j,0}}{\sum_{j=0}^n \hat{\alpha}_j} = \frac{\sum_{j=0}^n S_{j,0}}{\sum_{j=0}^n \hat{S}_{j,n}^{\text{CL}}} = \prod_{l=1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}}$$

Damit ist gezeigt, dass (b) aus (a) folgt.

Wir nehmen nun an, dass (b) gilt. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k = 1$$

Für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k = \hat{\alpha}_i \sum_{k=0}^{n-i} \hat{\vartheta}_k = \hat{S}_{i,n}^{\text{CL}} \prod_{l=n-i+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} = S_{i,n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}$$

Für $k = 0$ gilt nach Lemma 13.5.1

$$\sum_{i=0}^n \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_0 = \left(\sum_{i=0}^n \hat{\alpha}_i\right) \hat{\vartheta}_0 = \left(\sum_{i=0}^n \hat{S}_{i,n}^{\text{CL}}\right) \prod_{l=1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} = \sum_{i=0}^n S_{i,0} = \sum_{i=0}^n Z_{i,0}$$

und für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt nach Lemma 13.5.1

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k &= \left(\sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i \right) \hat{\vartheta}_k \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-k} \hat{S}_{i,n}^{\text{CL}} \right) \left(\prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} - \prod_{l=k}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k} \right) \left(\prod_{l=k+1}^n \hat{\varphi}_l^{\text{CL}} \right) \left(\prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} - \prod_{l=k}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}} \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k} \right) \left(1 - \frac{1}{\hat{\varphi}_k^{\text{CL}}} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k} - \sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass (a) aus (b) folgt. \square

Daher liefert das multiplikative Modell mit der Marginalsummen-Schätzung eine einfache Begründung für das chain-ladder Verfahren.

13.6 Das maximum-likelihood Verfahren

In diesem Abschnitt betrachten wir die maximum-likelihood Schätzung der erwarteten Endschadenstände im multiplikativen Modell.

Zwei Familien von Zufallsvariablen

$$\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

heißen *maximum-likelihood Schätzer* für die Familien

$$\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

der Parameter des multiplikativen Modells, wenn sie die zu der gemeinsamen Verteilung der beobachtbaren Zuwächse gehörende likelihood Funktion unter der Nebenbedingung

$$\sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k = 1$$

maximieren; aufgrund der Monotonie des Logarithmus ist dies genau dann der Fall, wenn sie die zugehörige loglikelihood Funktion unter dieser Nebenbedingung maximieren.

Wir betrachten zunächst das Poisson-Modell:

Das Poisson-Modell:

- (i) Die Familie aller Zuwächse ist unabhängig.
 (ii) Es gibt Familien von strikt positiven Parametern

$$\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

mit

$$\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$$

derart, dass für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P_{Z_{i,k}} = \mathbf{P}(\alpha_i \vartheta_k)$$

gilt.

Im Poisson-Modell gilt für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E[Z_{i,k}] = \alpha_i \vartheta_k$$

Daher ist das Poisson-Modell ein multiplikatives Modell.

13.6.1 Satz. *Unter den Annahmen des Poisson-Modells sind die maximum-likelihood Schätzer für $\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ und $\{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ Marginalsummen-Schätzer.*

Beweis. Für jede Familie $\{z_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \leq n} \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt

$$P \left[\bigcap_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \leq n} \{Z_{i,k} = z_{i,k}\} \right] = \prod_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \leq n} \left(e^{-\alpha_i \vartheta_k} \frac{(\alpha_i \vartheta_k)^{z_{i,k}}}{z_{i,k}!} \right)$$

Wir fassen die beobachtbaren Zuwächse als Koordinaten eines Zufallsvektors $\mathbf{Z} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ auf. Dann erhalten wir die likelihood Funktion L mit

$$\begin{aligned} L \left(\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}, \{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}} \mid \mathbf{Z} \right) \\ = \prod_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \leq n} \left(e^{-\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k} \frac{(\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k)^{Z_{i,k}}}{Z_{i,k}!} \right) \end{aligned}$$

und für die loglikelihood Funktion $\log \circ L$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} (\log \circ L) \left(\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}, \{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}} \mid \mathbf{Z} \right) \\ = \sum_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \leq n} \left(-\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k + Z_{i,k} \left(\log(\hat{\alpha}_i) + \log(\hat{\vartheta}_k) \right) \right) + C \end{aligned}$$

wobei C nicht von den Familien $\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ und $\{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ abhängt und daher bei der partiellen Differentiation der loglikelihood Funktion verschwindet. Wir berücksichtigen nun die Nebenbedingung

$$\sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k = 1$$

und betrachten die Lagrange-Funktion h mit

$$h\left(\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}, \{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}, \Lambda \mid \mathbf{Z}\right) \\ := \sum_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \leq n} \left(-\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k + Z_{i,k} \left(\log(\hat{\alpha}_i) + \log(\hat{\vartheta}_k) \right) \right) + \Lambda \left(1 - \sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k \right)$$

Durch partielle Differentiation und Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergeben sich die *maximum-likelihood Gleichungen*

$$\sum_{k=0}^{n-i} \left(-\hat{\vartheta}_k + Z_{i,k} \frac{1}{\hat{\alpha}_i} \right) = 0 \quad \text{für alle } i \in \{0, 1, \dots, n\} \\ \sum_{i=0}^{n-k} \left(-\hat{\alpha}_i + Z_{i,k} \frac{1}{\hat{\vartheta}_k} \right) - \Lambda = 0 \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 1 - \sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k = 0$$

Aus der ersten Gruppe der maximum-likelihood Gleichungen ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k} \quad \text{für alle } i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

und damit die erste Gruppe der Marginalsummen-Gleichungen. Aus den übrigen maximum-likelihood Gleichungen ergibt sich

$$\Lambda = \Lambda \sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^n \Lambda \hat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} \left(-\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k + Z_{i,k} \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} \left(-\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k + Z_{i,k} \right)$$

und aus der ersten Gruppe der Marginalsummen-Gleichungen folgt nun

$$\Lambda = 0$$

Aus der zweiten Gruppe der maximum-likelihood Gleichungen ergibt sich daher

$$\sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k = \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k} \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

und damit die zweite Gruppe der Marginalsummen-Gleichungen. \square

Wir betrachten nun das Multinomial-Modell:

Das Multinomial-Modell:

- (i) Die Zuwächse aus verschiedenen Anfalljahren sind unabhängig in dem Sinn, dass für jede Familie $\{B_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Gleichung

$$P \left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} \in B_{i,k}\} \right] = \prod_{i=0}^n P \left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} \in B_{i,k}\} \right]$$

erfüllt ist.

- (ii) Für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt $E[S_{i,n}] > 0$.
 (iii) Es gibt eine Familie von strikt positiven Parametern

$$\{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

mit

$$\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$$

derart, dass für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und den Zufallsvektor $\mathbf{Z}_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit den Koordinaten $Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n}$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$ mit $P[\{S_{i,n} = s\}] > 0$

$$P_{\mathbf{Z}_i | \{S_{i,n}=s\}} = \mathbf{M}(s, \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

gilt.

Das Multinomial-Modell bezieht sich, wie das Poisson-Modell, auf Schaden- zahlen, denn für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt $Z_{i,k} \in \mathcal{L}^0(\mathbb{N}_0)$ und damit auch $S_{i,k} \in \mathcal{L}^0(\mathbb{N}_0)$. Die folgenden Ergebnisse zeigen, dass das Multinomial-Modell ein multiplikatives Modell ist und das Poisson-Modell verallgemeinert:

13.6.2 Lemma. *Das Poisson-Modell ist ein Multinomial-Modell.*

Beweis. Wir betrachten das Poisson-Modell mit

$$P_{Z_{i,k}} = \mathbf{P}(\alpha_i \vartheta_k)$$

für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse gilt für jede Familie $\{B_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P \left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} \in B_{i,k}\} \right] = \prod_{i=0}^n \prod_{k=0}^n P[\{Z_{i,k} \in B_{i,k}\}] = \prod_{i=0}^n P \left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} \in B_{i,k}\} \right]$$

Daher sind die Anfalljahre unabhängig. Aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse gilt nach Beispiel 3.3.9 außerdem

$$P_{S_{i,n}} = \mathbf{P}(\alpha_i)$$

Daher gilt für alle $s \in \mathbb{N}_0$ und für jede Familie $\{z_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{k=0}^n z_k = s$

$$\begin{aligned} P \left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_k\} \mid \{S_{i,n} = s\} \right] &= \frac{P \left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_k\} \right]}{P[\{S_{i,n} = s\}]} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^n \left(e^{-\alpha_i \vartheta_k} \frac{(\alpha_i \vartheta_k)^{z_k}}{z_k!} \right)}{e^{-\alpha_i} \frac{\alpha_i^s}{s!}} \\ &= \frac{s!}{\prod_{k=0}^n z_k!} \prod_{k=0}^n \vartheta_k^{z_k} \end{aligned}$$

und damit $P_{\mathbf{Z}_i | \{S_{i,n}=s\}} = \mathbf{M}(s, \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$. □

13.6.3 Lemma. *Das Multinomial-Modell ist ein multiplikatives Modell.*

Beweis. Für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $s \in \mathbb{N}_0$ mit $P[\{S_{i,n} = s\}] > 0$ gilt $P_{Z_{i,k} | \{S_{i,n}=s\}} = \mathbf{B}(s, \vartheta_k)$ und damit

$$E[Z_{i,k} | \{S_{i,n} = s\}] = s \vartheta_k$$

Aus Satz 4.4.1 folgt nun

$$\begin{aligned} E[Z_{i,k}] &= \sum_{s \in \mathbb{N}_0, P[\{S_{i,n}=s\}] > 0} E[Z_{i,k} \chi_{\{S_{i,n}=s\}}] \\ &= \sum_{s \in \mathbb{N}_0, P[\{S_{i,n}=s\}] > 0} E[Z_{i,k} | \{S_{i,n} = s\}] P[\{S_{i,n} = s\}] \\ &= \sum_{s \in \mathbb{N}_0, P[\{S_{i,n}=s\}] > 0} s \vartheta_k P[\{S_{i,n} = s\}] \\ &= E[S_{i,n}] \vartheta_k \end{aligned}$$

Mit $\alpha_i := E[S_{i,n}]$ folgt die Behauptung. □

Das folgende Ergebnis zeigt, dass Satz 13.6.1 über die maximum-likelihood Schätzer im Poisson-Modell unter bestimmten Annahmen an die Verteilung der Endschadenstände auf das Multinomial-Modell verallgemeinert werden kann:

13.6.4 Satz. *Unter den Annahmen des Multinomial-Modells mit negativbinomial-verteilten Endschadenständen sind die maximum-likelihood Schätzer für $\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ und $\{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ Marginalsummen-Schätzer.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Annahmen des Multinomial-Modells erfüllt sind und dass es für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ Parameter $\beta_i \in (0, \infty)$ und $\eta_i \in (0, 1)$ gibt mit

$$P_{S_{i,n}} = \mathbf{NB}(\beta_i, \eta_i)$$

Der Beweis der Behauptung des Satzes erfolgt in mehreren Schritten: Für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und jede Familie $\{z_{i,k}\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}} \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} & P \left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\} \right] \\ &= P \left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\} \mid \left\{ S_{i,n} = \sum_{k=0}^n z_{i,k} \right\} \right] P \left[\left\{ S_{i,n} = \sum_{k=0}^n z_{i,k} \right\} \right] \\ &= \frac{(\sum_{k=0}^n z_{i,k})!}{\prod_{k=0}^n z_{i,k}!} \prod_{k=0}^n \vartheta_k^{z_{i,k}} \cdot \left(\frac{\beta_i + \sum_{k=0}^n z_{i,k} - 1}{\sum_{k=0}^n z_{i,k}} \right) (1-\eta_i)^{\beta_i} \eta_i^{\sum_{k=0}^n z_{i,k}} \\ &= \frac{(\sum_{k=0}^n z_{i,k})!}{\prod_{k=0}^n z_{i,k}!} \prod_{k=0}^n \vartheta_k^{z_{i,k}} \cdot \frac{\Gamma(\beta_i + \sum_{k=0}^n z_{i,k})}{\Gamma(\beta_i) (\sum_{k=0}^n z_{i,k})!} (1-\eta_i)^{\beta_i} \eta_i^{\sum_{k=0}^n z_{i,k}} \\ &= \frac{\Gamma(\beta_i + \sum_{k=0}^n z_{i,k})}{\Gamma(\beta_i) \prod_{k=0}^n z_{i,k}!} (1-\eta_i)^{\beta_i} \prod_{k=0}^n (\eta_i \vartheta_k)^{z_{i,k}} \end{aligned}$$

Für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und jede Familie $\{z_{i,k}\}_{k \in \{0,1,\dots,n-i\}} \subseteq \mathbb{N}_0$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} & P \left[\bigcap_{k=0}^{n-i} \{Z_{i,k} = z_{i,k}\} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta_i + \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k})}{\Gamma(\beta_i) \prod_{k=0}^{n-i} z_{i,k}!} \left(\frac{1-\eta_i}{1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l} \right)^{\beta_i} \prod_{k=0}^{n-i} \left(\frac{\eta_i \vartheta_k}{1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l} \right)^{z_{i,k}} \end{aligned}$$

und aufgrund der Unabhängigkeit der Anfalljahre ergibt sich nun für jede Familie $\{z_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \leq n} \subseteq \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} & P \left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^{n-i} \{Z_{i,k} = z_{i,k}\} \right] \\ &= \prod_{i=0}^n \left(\frac{\Gamma(\beta_i + \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k})}{\Gamma(\beta_i) \prod_{k=0}^{n-i} z_{i,k}!} \left(\frac{1-\eta_i}{1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l} \right)^{\beta_i} \prod_{k=0}^{n-i} \left(\frac{\eta_i \vartheta_k}{1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l} \right)^{z_{i,k}} \right) \end{aligned}$$

Damit ist die gemeinsame Verteilung der beobachtbaren Zuwächse bestimmt. Des weiteren gilt für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E[S_{i,n}] = \beta_i \frac{\eta_i}{1-\eta_i}$$

Mit

$$\alpha_i := \beta_i \frac{\eta_i}{1 - \eta_i}$$

erhält man daher

$$\beta_i = \alpha_i \frac{1 - \eta_i}{\eta_i}$$

und damit eine Darstellung der gemeinsamen Verteilung der beobachtbaren Zuwächse in Abhängigkeit der Familien $\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$, $\{\eta_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ und $\{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$.

Daraus ergibt sich die likelihood Funktion, die loglikelihood Funktion und die Lagrange-Funktion für die Familien

$$\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}, \{\hat{\eta}_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}, \{\hat{\vartheta}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k = 1$$

Die maximum-likelihood Gleichungen zu den partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach $\hat{\eta}_i$ lassen sich mit Hilfe der maximum-likelihood Gleichungen zu den partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach $\hat{\alpha}_i$ vereinfachen und führen dann auf die erste Gruppe

$$\sum_{k=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k} \quad \text{für alle } i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

der Marginalsummen-Gleichungen.

Aus den maximum-likelihood Gleichungen zu den partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach $\hat{\vartheta}_k$, der Nebenbedingung und der ersten Gruppe der Marginalsummen-Gleichungen folgt zunächst, dass der Lagrange-Parameter verschwindet, und aus den maximum-likelihood Gleichungen zu den partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach $\hat{\vartheta}_k$ ergibt sich dann die zweite Gruppe

$$\sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k = \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k} \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

der Marginalsummen-Gleichungen. □

Aufgaben

13.6.A Führen Sie die fehlenden Teile des Beweises von Satz 13.6.4 aus.

13.6.B Beweisen Sie ein Analogon von Satz 13.6.4 für den Fall binomial-verteilter Endschadenstände.

13.7 Bemerkungen

Das chain-ladder Verfahren ist der bekannteste Vertreter einer Gruppe von Verfahren der Schadenreservierung, in denen die erwarteten Endschadenstände durch Multiplikation der letzten beobachtbaren Schadenstände mit geeigneten Faktoren geschätzt werden; eine frühe Quelle ist Tarbell [1934].

Da die chain-ladder Faktoren als gewichtete Mittel der beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren des betreffenden Abwicklungsjahres dargestellt werden können, erhält man eine Variante des chain-ladder Verfahrens, indem man für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ eine Familie von Zufallsvariablen $\{W_{j,k}\}_{j \in \{0,1,\dots,n-k\}}$ mit

$$\sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} = 1$$

wählt und durch

$$\widehat{S}_{i,k} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{F}_l$$

mit

$$\widehat{F}_k := \sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} F_{j,k}$$

modifizierte chain-ladder Schätzer definiert. Insbesondere kann man alle beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren eines Abwicklungsjahres gleich gewichten (arithmetisches Mittel) oder die beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren jüngerer Anfalljahre stärker gewichten als diejenigen älterer Anfalljahre.

In Anbetracht der Vielfalt der Möglichkeiten, die beobachtbaren empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren zu gewichten, stellt sich natürlich die Frage nach der optimalen Wahl der Gewichte; insbesondere stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen und in welchem Sinn die im chain-ladder Verfahren verwendeten Gewichte

$$W_{j,k}^{\text{CL}} := \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}}$$

optimal sind. Diese Frage wurde von Mack [1997] sowie von Schmidt und Schnaus [1996] und von Schmidt [1999a, 1999b, 1999c] untersucht.

Die Übereinstimmung der chain-ladder und grossing-up Schätzer für die erwarteten Endschadenstände wurde von Lorenz und Schmidt [1999] gezeigt.

Das wohl älteste stochastische Modell zur Begründung des chain-ladder Verfahrens ist das Poisson-Modell in Verbindung mit der maximum-likelihood Schätzung der Parameter, das auf Hachemeister und Stanard [1975] zurückgeht.

Als Verallgemeinerung des Poisson-Modells wurde von Schmidt und Wünsche [1998] das Multinomial-Modell vorgeschlagen und es wurde gezeigt, dass die maximum-likelihood Schätzung auch im Multinomial-Modell mit beliebig Panjer-verteilten Endschadenständen auf die chain-ladder Schätzer führt. Von besonderem Interesse ist der in Abschnitt 13.6 behandelte Fall negativbinomial-verteilter Endschadenstände: In diesem Fall besitzen alle Schadenstände eine Negativbinomial-Verteilung und damit eine Varianz, die größer ist als der Erwartungswert, was in vielen Fällen realistisch ist. Darüber hinaus können die Einzelwahrscheinlichkeiten der Negativbinomial-Verteilung $\mathbf{NB}(\beta, \vartheta)$ in der Form

$$\binom{\beta + k - 1}{k} (1 - \vartheta)^\beta \vartheta^k = \int_{(0, \infty)} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{((1 - \vartheta)/\vartheta)^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-(1 - \vartheta)/\vartheta} \alpha^{\beta - 1} d\alpha$$

dargestellt werden. Daher ist jede Negativbinomial-Verteilung eine *gemischte Poisson-Verteilung*. In Schmidt und Zocher [2005] wurde gezeigt, dass die maximum-likelihood Schätzung im Multinomial-Modell auch für viele andere gemischte Poisson-Verteilungen der Endschadenstände auf die chain-ladder Schätzer führt.

In Schmidt und Wünsche [1998] wurde auch das multiplikative Modell als ein eigenständiges Modell zur Begründung des chain-ladder Verfahrens eingeführt; vgl. Kapitel 14.

Für einen Vergleich verschiedener Modelle für das chain-ladder Verfahren verweisen wir auf Hess und Schmidt [2002].

Die inhaltliche Verwandtschaft von Tarifierung und Schadenreservierung spiegelt sich in der Ähnlichkeit der verwendeten Modelle und Methoden wider. Dies gilt insbesondere für das multiplikative Modell, die Marginalsummen-Schätzung, und die maximum-likelihood Schätzung; vgl. Kapitel 10. Darüber hinaus können auch die Modelle und Methoden der Erfahrungstarifierung in der Schadenreservierung angewendet werden; vgl. Witting [1987], Hesselager und Witting [1988], Hess und Schmidt [2001] sowie Radtke und Schmidt [2004].

Schadenreservierung: Bornhuetter–Ferguson Prinzip

Das eigentliche Problem der Schadenreservierung besteht in der Prognose der zukünftigen Schadenstände und nicht in der Schätzung ihrer Erwartungswerte. Wir betrachten daher in diesem Kapitel die Prognose der zukünftigen Schadenstände und interpretieren insbesondere die chain–ladder Schätzer als Prädiktoren der zukünftigen Schadenstände.

Neben dem chain–ladder Verfahren gibt es zahlreiche weitere Verfahren zur Prognose der zukünftigen Schadenstände. Von besonderer Bedeutung sind das Bornhuetter–Ferguson Verfahren, das loss–development Verfahren, das Cape–Cod Verfahren, und das additive Verfahren. Diese Verfahren bilden zusammen mit dem chain–ladder Verfahren die Gruppe der *Basisverfahren*.

Grundsätzlich ist die Verwendung von Abwicklungsdreiecken in der Schadenreservierung nur dann sinnvoll, wenn man annehmen kann, dass die Abwicklung der Schäden für alle Anfalljahre ähnlich verläuft. Diese zunächst vage Annahme kann auf unterschiedliche Weise durch ein stochastisches Modell formalisiert werden und führt auf den Begriff des *Abwicklungsmusters*. Die Annahme, dass ein Abwicklungsmuster vorliegt, erweist sich als äquivalent mit der Annahme, dass das multiplikative Modell der Schadenreservierung vorliegt.

Der Begriff des Abwicklungsmusters führt auf eine Erweiterung der ursprünglichen Version des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens, in die sich alle Basisverfahren einordnen lassen. Die Basisverfahren, deren Prädiktoren eine auf den ersten Blick sehr unterschiedliche Struktur aufweisen, werden damit vergleichbar und es stellt sich heraus, dass sie sich nur in der Wahl der Schätzer für die Parameter des multiplikativen Modells unterscheiden.

Aus der Analyse der Basisverfahren, die auf Schätzer für die Parameter des multiplikativen Modells führt, ergibt sich schließlich eine Synthese, die durch neue Kombinationen dieser Schätzer auf neue Versionen des erweiterten Bornhuetter–Ferguson Verfahrens führt.

14.1 Abwicklungsmuster

Die Verwendung von Abwicklungsdreiecken in der Schadenreservierung ist nur dann sinnvoll, wenn man annehmen kann, dass die Abwicklung der Schäden für alle Anfalljahre ähnlich verläuft. Die zunächst vage Annahme, dass die Abwicklung der Schäden einem für alle Anfalljahre identischen Abwicklungsmuster folgt, kann auf unterschiedliche Weise formalisiert werden.

In diesem Abschnitt betrachten wir drei klassische Abwicklungsmuster, die unter einander äquivalent sind, sowie ein weiteres Abwicklungsmuster, das sich mit Hilfe von Volumenmaßen für die Anfalljahre ergibt.

Die Annahme, dass die Abwicklung der Schäden einem für alle Anfalljahre identischen Abwicklungsmuster folgt, kann als ein primitives stochastisches Modell angesehen werden, mit dem viele Verfahren der Schadenreservierung begründet werden können.

Abwicklungsmuster für Anteile

Ein Parametervektor

$$\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

heißt *Abwicklungsmuster für Anteile*, wenn für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

gilt. Dies bedeutet, dass für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ die *individuellen Abwicklungsanteile*

$$\vartheta_{i,k} := \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

für alle Anfalljahre $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ identisch sind. Es gilt $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$.

Ein Abwicklungsmuster für Anteile liegt genau dann vor, wenn es Familien von Parametern

$$\{\alpha_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \{\vartheta_k\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

gibt mit

$$\alpha_i = E[S_{i,n}]$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und

$$E[Z_{i,k}] = \alpha_i \vartheta_k$$

für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Daher liegt ein Abwicklungsmuster für Anteile genau dann vor, wenn die Annahmen des multiplikativen Modells der Schadenreservierung erfüllt sind.

Abwicklungsmuster für Quoten

Ein Parametervektor

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

heißt *Abwicklungsmuster für Quoten*, wenn für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

gilt. Dies bedeutet, dass für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ die *individuellen Abwicklungsquoten*

$$\gamma_{i,k} := \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

für alle Anfalljahre $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ identisch sind. Es gilt $\gamma_n = 1$.

Abwicklungsmuster für Faktoren

Ein Parametervektor

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

heißt *Abwicklungsmuster für Faktoren*, wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

gilt. Dies bedeutet, dass für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ die *individuellen Abwicklungsfaktoren*

$$\varphi_{i,k} := \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

für alle Anfalljahre $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ identisch sind.

Äquivalenz

Die bisher behandelten klassischen Abwicklungsmuster sind äquivalent in dem Sinne, dass die Existenz eines der drei Abwicklungsmuster die Existenz der beiden anderen Abwicklungsmuster impliziert. In der Tat können die drei Abwicklungsmuster ineinander konvertiert werden.

Der Zusammenhang zwischen den Abwicklungsmustern für Anteile und Quoten ist offensichtlich:

- Ist ϑ ein Abwicklungsmuster für Anteile, so ist γ mit

$$\gamma_k := \sum_{l=0}^k \vartheta_l$$

ein Abwicklungsmuster für Quoten.

- Ist γ ein Abwicklungsmuster für Quoten, so ist ϑ mit

$$\vartheta_k := \begin{cases} \gamma_0 & \text{falls } k = 0 \\ \gamma_k - \gamma_{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Abwicklungsmuster für Anteile.

Etwas weniger offensichtlich, aber dennoch leicht zu zeigen, ist der Zusammenhang zwischen den Abwicklungsmustern für Quoten und Faktoren:

- Ist γ ein Abwicklungsmuster für Quoten, so ist φ mit

$$\varphi_k := \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}$$

ein Abwicklungsmuster für Faktoren.

- Ist φ ein Abwicklungsmuster für Faktoren, so ist γ mit

$$\gamma_k := \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\varphi_l}$$

ein Abwicklungsmuster für Quoten.

Durch Kombination dieser Ergebnisse erhält man einen Zusammenhang zwischen den Abwicklungsmustern für Anteile und Faktoren.

Im Fall von Schadenzahlen oder Schadenzahlungen kann man annehmen, dass für die klassischen Abwicklungsmuster auch die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt $\vartheta_k > 0$.
- Es gilt $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n$.
- Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\varphi_k > 1$.

Im Fall von Schadenaufwänden sind diese Bedingungen im allgemeinen nicht erfüllt.

Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse

Die bisher betrachteten klassischen Abwicklungsmuster sind vollständig durch die Erwartungswerte der Zuwächse und Schadenstände bestimmt.

Wir betrachten nun ein Abwicklungsmuster, das auf einem Parametervektor

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$$

von bekannten *Volumenmaßen* für die Anfalljahre beruht; als Volumenmaß kommt beispielsweise die Prämiensumme oder die Anzahl der Verträge in Betracht. Ein Parametervektor

$$\zeta(\boldsymbol{\pi}) = (\zeta_0(\boldsymbol{\pi}), \zeta_1(\boldsymbol{\pi}), \dots, \zeta_n(\boldsymbol{\pi}))$$

heißt *Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse*, wenn für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\zeta_k(\boldsymbol{\pi}) = E \left[\frac{Z_{i,k}}{\pi_i} \right] = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$$

gilt. Dies bedeutet, dass für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ die *individuellen Schadenquotenzuwächse*

$$\zeta_{i,k}(\boldsymbol{\pi}) := E \left[\frac{Z_{i,k}}{\pi_i} \right]$$

für alle Anfalljahre $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ identisch sind.

Das Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse unterscheidet sich vom Abwicklungsmuster für Anteile darin, dass es als Bezugsgröße die Volumenmaße anstelle der erwarteten Endschadenstände verwendet. Das Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse beschreibt die Abwicklung indirekt: Ist $\zeta(\boldsymbol{\pi})$ ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse, so ist ϑ mit

$$\vartheta_k := \frac{\zeta_k(\boldsymbol{\pi})}{\sum_{l=0}^n \zeta_l(\boldsymbol{\pi})}$$

ein Abwicklungsmuster für Anteile und γ mit

$$\gamma_k := \frac{\sum_{l=0}^k \zeta_l(\boldsymbol{\pi})}{\sum_{l=0}^n \zeta_l(\boldsymbol{\pi})}$$

ist ein Abwicklungsmuster für Quoten; die Abwicklungsmuster ϑ und γ sind, wie in der Notation angedeutet, in der Tat unabhängig von $\boldsymbol{\pi}$.

Man beachte den Unterschied zwischen Quoten und Schadenquoten.

14.1.1 Bemerkung. Im Fall von Schadenzahlen oder Schadenzahlungen liegt es nahe, die Parameter der Abwicklungsmuster für Anteile bzw. Quoten als Abwicklungswahrscheinlichkeiten bzw. kumulierte Abwicklungswahrscheinlichkeiten zu interpretieren. Diese Interpretation ist hilfreich, aber sie ist nicht korrekt, da die Erwartungswerte $E[Z_{i,k}/S_{i,n}]$ bzw. $E[S_{i,k}/S_{i,n}]$ im

allgemeinen nicht mit den Quotienten $E[Z_{i,k}]/E[S_{i,n}]$ bzw. $E[S_{i,k}]/E[S_{i,n}]$ übereinstimmen. Die hier gegebene Definition der drei klassischen Abwicklungsmuster ist dennoch sinnvoll, weil sie ein primitives stochastisches Modell darstellt, mit dem sich die wichtigsten der in der Praxis verwendeten Verfahren der Schadenreservierung begründen lassen.

Im Hinblick auf die Vergleichbarkeit verschiedener Verfahren zur Schadenreservierung werden wir im folgenden vor allem das *Abwicklungsmuster für Quoten* betrachten.

14.2 Schätzung von Abwicklungsmustern

Jedes der in Abschnitt 14.3 behandelten Basisverfahren kann durch die Annahme, dass ein Abwicklungsmuster vorliegt, begründet werden. Dies liegt daran, dass für jedes dieser Basisverfahren die Prädiktoren der zukünftigen Schadenstände mit Hilfe von Schätzern für das Abwicklungsmuster für Quoten ausgedrückt werden können.

Allgemein kann die Schätzung eines Abwicklungsmusters auf der Grundlage der folgenden Informationsquellen erfolgen:

- *Interne Information*: Dies ist die Information, die im Abwicklungsdreieck des betrachteten Bestandes enthalten ist.
- *Externe Information*: Dies ist jede Art von Information, die nicht im Abwicklungsdreieck des betrachteten Bestandes enthalten ist. Externe Information kann beispielsweise in Marktstatistiken bestehen oder in Information über vergleichbare Bestände; darüber hinaus betrachten wir auch Volumenmaße für den betrachteten Bestand als externe Information, weil sie nicht im Abwicklungsdreieck enthalten sind.

Natürlich kann die Schätzung auch auf *gemischter Information*, also einer Kombination interner und externer Information, beruhen.

Die nachfolgend dargestellten Schätzer betreffen das Abwicklungsmuster für Faktoren und das Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse. Da jedes dieser Abwicklungsmuster in ein Abwicklungsmuster für Quoten konvertiert werden kann, können in der gleichen Weise auch die entsprechenden Schätzer in Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten umgewandelt werden.

Schätzung auf der Grundlage interner Information

Die direkte Schätzung der Abwicklungsmuster für Anteile oder Quoten auf der Grundlage interner Information ist problematisch: Da der Endschadenstand nur für das Anfalljahr 0 beobachtbar ist, stehen als direkte Schätzer für die Parameter ϑ_k bzw. γ_k des Abwicklungsmusters für Anteile bzw. Quoten zunächst nur die *empirischen individuellen Abwicklungsanteile* $Z_{0,k}/S_{0,n}$ bzw. die *empirischen individuellen Abwicklungsquoten* $S_{0,k}/S_{0,n}$ zur Verfügung.

Für die Schätzung des Abwicklungsmusters für Faktoren steht dagegen eine Vielzahl von Schätzern zur Verfügung: Sei

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

ein Abwicklungsmuster für Faktoren. Dann ist, für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$, jeder der *empirischen individuellen Abwicklungsfaktoren*

$$\hat{\varphi}_{i,k} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}$$

mit $i \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ ein sinnvoller Schätzer für φ_k , und dies gilt auch für jedes gewichtete Mittel

$$\hat{\varphi}_k := \sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} \hat{\varphi}_{j,k}$$

mit zufälligen oder konstanten Gewichten $W_{j,k}$ mit $\sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} = 1$. Der bekannteste Schätzer dieser Familie ist der *chain-ladder Faktor*

$$\hat{\varphi}_k^{\text{CL}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \hat{\varphi}_{j,k}$$

der im chain-ladder Verfahren verwendet wird. Wir bezeichnen

$$\hat{\varphi}^{\text{CL}} := (\hat{\varphi}_1^{\text{CL}}, \dots, \hat{\varphi}_n^{\text{CL}})$$

als *chain-ladder Schätzer* für das Abwicklungsmuster für Faktoren.

Aufgrund der Beziehung zwischen dem Abwicklungsmuster für Faktoren und dem Abwicklungsmuster für Quoten können Schätzer für Faktoren in Schätzer für Quoten umgewandelt werden. Insbesondere sind die *chain-ladder Quoten*

$$\hat{\gamma}_k^{\text{CL}} := \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}}$$

Schätzer für die Quoten

$$\gamma_k := \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\varphi_l}$$

Wir bezeichnen

$$\hat{\gamma}^{\text{CL}} := (\hat{\gamma}_0^{\text{CL}}, \hat{\gamma}_1^{\text{CL}}, \dots, \hat{\gamma}_n^{\text{CL}})$$

als *chain-ladder Schätzer* für das Abwicklungsmuster für Quoten.

14.2.1 Beispiel. Das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände unterscheidet sich von dem in Kapitel 13 betrachteten Abwicklungsdreieck in der Realisation des Schadenstandes $S_{4,1}$:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	4261				
5	1889					
$\hat{\varphi}_k^{\text{CL}}(\omega)$		2,051	1,329	1,232	1,120	1,044
$\hat{\gamma}_k^{\text{CL}}(\omega)$	0,255	0,522	0,694	0,855	0,958	1,000

Die ungewöhnlich hohe Realisation des aktuellen Schadenstandes $S_{4,1}$ wirkt sich auf die Realisation des chain-ladder Faktors $\hat{\varphi}_1^{\text{CL}}$ und damit auf die Realisation der chain-ladder Quote $\hat{\gamma}_0^{\text{CL}}$ aus.

Grundsätzlich können in der Definition der chain-ladder Faktoren auch andere Gewichte verwendet werden: Beispielsweise führt die Wahl von $W_{j,k} := 1/(n-k+1)$ auf das arithmetische Mittel, und eine andere Möglichkeit besteht in der Wahl von Gewichten, die für junge Kalenderjahre groß und für alte Kalenderjahre klein sind. Die Wahl der Gewichte sollte die Qualität der Abwicklungsdaten berücksichtigen und / oder auf Optimalitätsbetrachtungen in einem stochastischen Modell beruhen.

Schätzung auf der Grundlage gemischter Information

Sei

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$$

ein Volumenmaß für die Anfalljahre und

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\pi}) = (\zeta_0(\boldsymbol{\pi}), \zeta_1(\boldsymbol{\pi}), \dots, \zeta_n(\boldsymbol{\pi}))$$

ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse. Dann ist, für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, jeder der *empirischen individuellen Schadenquotenzuwächse*

$$\hat{\zeta}_{i,k}(\boldsymbol{\pi}) := \frac{Z_{i,k}}{\pi_i}$$

mit $i \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ ein sinnvoller Schätzer für $\zeta_k(\boldsymbol{\pi})$, und dies gilt auch für jedes gewichtete Mittel

$$\widehat{\zeta}_k(\boldsymbol{\pi}) := \sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} \widehat{\zeta}_{j,k}(\boldsymbol{\pi})$$

mit zufälligen oder konstanten Gewichten $W_{j,k}$ mit $\sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} = 1$. Der bekannteste Schätzer dieser Gruppe ist der *additive Schadenquotenzuwachs*

$$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\pi_j}{\sum_{h=0}^{n-k} \pi_h} \widehat{\zeta}_{j,k}(\boldsymbol{\pi})$$

der im additiven Verfahren verwendet wird. Wir bezeichnen

$$\widehat{\zeta}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := (\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \widehat{\zeta}_1^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \dots, \widehat{\zeta}_n^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))$$

als *additiven Schätzer* für das Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse.

Aufgrund der Beziehung zwischen dem Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse und dem Abwicklungsmuster für Quoten können Schätzer für Schadenquotenzuwächse in Schätzer für Quoten umgewandelt werden. Insbesondere sind die *additiven Quoten*

$$\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := \frac{\sum_{l=0}^k \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})}{\sum_{l=0}^n \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})}$$

Schätzer für die Quoten

$$\gamma_k := \frac{\sum_{l=0}^k \zeta_l(\boldsymbol{\pi})}{\sum_{l=0}^n \zeta_l(\boldsymbol{\pi})}$$

Im Gegensatz zu den Quoten hängen die additiven Quoten vom Volumenmaß $\boldsymbol{\pi}$ ab, sind aber invariant unter einer Skalierung des Volumenmaßes mit einem Faktor $c \in (0, \infty)$. Wir bezeichnen

$$\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := (\widehat{\gamma}_0^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \widehat{\gamma}_1^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \dots, \widehat{\gamma}_n^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))$$

als *additiven Schätzer* für das Abwicklungsmuster für Quoten.

14.2.2 Beispiel. Das folgende Abwicklungsdreieck für Zuwächse entspricht dem vorher betrachteten Abwicklungsdreieck für Schadenstände und enthält zusätzlich Volumenmaße für die Anfalljahre:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						π_i
	0	1	2	3	4	5	
0	1001	854	568	565	347	148	4025
1	1113	990	671	648	422		4456
2	1265	1168	800	744			5315
3	1490	1383	1007				5986
4	1725	2536					6939
5	1889						8158
$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})(\omega)$	0,243	0,259	0,154	0,142	0,091	0,037	
$\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})(\omega)$	0,263	0,543	0,709	0,862	0,960	1,000	

Die ungewöhnlich hohe Realisation des Zuwachses $Z_{4,1}$ wirkt sich auf die Realisation des additiven Schadenquotenzuwachses $\hat{\zeta}_1^{\text{AD}}(\pi)$ und damit auf die Realisationen aller additiven Quoten aus.

Grundsätzlich können in der Definition der additiven Schadenquotenzuwächse auch andere Gewichte verwendet werden.

Schätzung auf der Grundlage externer Information

Schließlich können auch *externe Quoten*

$$\hat{\gamma}^{\text{EX}} := (\hat{\gamma}_0^{\text{EX}}, \hat{\gamma}_1^{\text{EX}}, \dots, \hat{\gamma}_n^{\text{EX}})$$

als Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten verwendet werden.

14.2.3 Bemerkung. Die Verwendung bestimmter gewichteter Mittel zur Schätzung der Parameter eines Abwicklungsmusters kann in vielen Fällen durch ein lineares Modell mit unkorrelierten abhängigen Variablen und bestimmten Varianzen begründet werden:

- Die chain–ladder Faktoren können im chain–ladder Modell von Mack und Schnaus begründet werden (vgl. Mack [1994], Schmidt und Schnaus [1996], Radtke und Schmidt [2004], Schmidt [2006]).
- Die additiven Schadenquotenzuwächse können im additiven Modell von Mack begründet werden (vgl. Mack [1991], Radtke und Schmidt [2004], Schmidt [2006]).

In beiden Fällen liegen lineare Modelle mit einer speziellen Varianzstruktur vor, in denen die genannten Schätzer die Gauß–Markov Eigenschaft besitzen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass eine Veränderung der Varianzstruktur im allgemeinen auch zu einer Veränderung der optimalen Schätzer führt.

14.3 Basisverfahren

In diesem Abschnitt stellen wir die Basisverfahren der Schadenreservierung zunächst in ihrer Grundform und sodann in einer vereinheitlichten Form dar.

Der Ausgangspunkt ist eine Erweiterung des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens, die in enger Beziehung zum Begriff des Abwicklungsmusters für Quoten steht und als ein allgemeines Prinzip verstanden werden kann, das alle Basisverfahren als Spezialfälle enthält. Damit wird deutlich, dass die verschiedenen Basisverfahren sich im wesentlichen nur in der Art der verwendeten Information unterscheiden.

Das Bornhuetter–Ferguson Verfahren

Das (*erweiterte*) *Bornhuetter–Ferguson Verfahren* beruht auf der Annahme, dass es Parametervektoren

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\end{aligned}$$

gibt mit $\gamma_n = 1$ und

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k \alpha_i$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Wegen $\gamma_n = 1$ gilt

$$E[S_{i,n}] = \alpha_i$$

und damit

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

Dann ist $\boldsymbol{\alpha}$ der Vektor der erwarteten Endschadenstände und $\boldsymbol{\gamma}$ ist ein Abwicklungsmuster für Quoten, und es gilt

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,n-i}] + (\gamma_k - \gamma_{n-i}) \alpha_i$$

Für einen beliebigen Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$$

des Abwicklungsmusters für Quoten (mit $\hat{\gamma}_n = 1$) und einen beliebigen *a-priori Schätzer*

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)$$

der erwarteten Endschadenstände sind die *Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren* der Schadenstände $S_{i,k}$ mit $i + k \geq n$ definiert als

$$\hat{S}_{i,k}^{\text{BF}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \hat{\alpha}_i$$

Wir bezeichnen mit

$$\hat{\mathbf{S}}^{\text{BF}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) := (\hat{S}_{i,k}^{\text{BF}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}))_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \geq n}$$

das Dreieck aller Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren bezüglich $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ und $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$.

Die Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren $\hat{S}_{i,n}^{\text{BF}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}})$ der Endschadenstände $S_{i,n}$ können natürlich auch als Schätzer der erwarteten Endschadenstände $\alpha_i = E[S_{i,n}]$ interpretiert werden. In diesem Sinne stellen sie eine Korrektur der *a-priori Schätzer* $\hat{\alpha}_i$ dar, wobei sich die Korrektur durch die Verwendung der aktuellen Schadenstände und des Schätzers des Abwicklungsmusters ergibt; vgl. auch Aufgabe 14.3.B.

Für $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird die Differenz

$$\widehat{R}_i^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha}) := \widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha}) - S_{i,n-i}$$

als *Bornhuetter–Ferguson Reserve* für das Anfalljahr i bezeichnet. Es gilt $\widehat{R}_0^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha}) = 0$. Die Summe

$$\widehat{R}^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha}) := \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha})$$

wird als *Bornhuetter–Ferguson Gesamtreserve* bezeichnet.

14.3.1 Beispiel. Beim Bornhuetter–Ferguson Verfahren mit externen Schätzern des Abwicklungsmusters und der erwarteten Endschadenstände werden nur die aktuellen Schadenstände verwendet:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						$\widehat{\alpha}_i^{\text{EX}}(\omega)$	Reserve
	0	1	2	3	4	5		
0						3483	3517	0
1					3844	4043	3981	199
2				3977	4391	4621	4598	644
3			3880	4785	5295	5577	5658	1697
4		4261	5442	6436	6995	7306	6214	3045
5	1889	3344	4546	5558	6127	6443	6325	4554
$\widehat{\gamma}_k^{\text{EX}}(\omega)$	0,280	0,510	0,700	0,860	0,950	1,000		
Summe								10139

Die ungewöhnlich hohe Realisation des aktuellen Schadenstandes $S_{4,1}$ wirkt sich auf die Prädiktoren der nicht beobachtbaren Schadenstände des Anfalljahres 4 aus, nicht aber auf die Reserve.

Für die Bornhuetter–Ferguson Reserven der Anfalljahre gilt

$$\widehat{R}_i^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha}) = (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i$$

In der ursprünglichen Form des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens werden nur die Bornhuetter–Ferguson Reserven der Anfalljahre bestimmt und es wird nur der Fall $\widehat{\gamma}_k := \widehat{\gamma}_k^{\text{CL}}$ und $\widehat{\alpha}_i := \pi_i \widehat{\kappa}_i$ betrachtet, wobei π_i die Prämie und $\widehat{\kappa}_i$ ein Schätzer der *Endschadenquote* $\kappa_i := E[S_{i,n}/\pi_i]$ des Anfalljahres i ist; vgl. Bornhuetter und Ferguson [1972].

Beim Übergang zum erweiterten Bornhuetter–Ferguson Verfahren werden also

- die Zielgrößen verändert (beliebige zukünftige Schadenstände anstelle der Reserven der Anfalljahre) und
- die speziellen Schätzer der Parameter durch beliebige Schätzer ersetzt.

Dadurch wird die von Bornhuetter und Ferguson verwendete multiplikative Struktur in eine Form gebracht, die den Vergleich verschiedener Basisverfahren und ihre Einordnung in ein allgemeines Prinzip ermöglicht.

Das loss–development Verfahren

Das *loss–development Verfahren* beruht auf der Annahme, dass es einen Parametervektor

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

gibt mit

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dann ist γ ein Abwicklungsmuster für Quoten und es gilt

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k \frac{E[S_{i,n-i}]}{\gamma_{n-i}}$$

Für einen beliebigen Schätzer

$$\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$$

des Abwicklungsmusters für Quoten (mit $\hat{\gamma}_n = 1$) sind die *loss–development Prädiktoren* der Schadenstände $S_{i,k}$ mit $i + k \geq n$ definiert als

$$\hat{S}_{i,k}^{LD}(\hat{\gamma}) := \hat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}$$

Wir bezeichnen mit

$$\hat{S}^{LD}(\hat{\gamma}) := (\hat{S}_{i,k}^{LD}(\hat{\gamma}))_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \geq n}$$

das Dreieck aller loss–development Prädiktoren bezüglich $\hat{\gamma}$.

14.3.2 Beispiel. Beim loss–development Verfahren mit externen Schätzern des Abwicklungsmusters werden nur die aktuellen Schadenstände verwendet:

Anfall– jahr i	Abwicklungsjahr k						Reserve
	0	1	2	3	4	5	
0						3483	0
1					3844	4046	202
2				3977	4393	4624	647
3			3880	4767	5266	5543	1663
4		4261	5848	7185	7937	8355	4094
5	1889	3441	4723	5802	6409	6746	4857
$\hat{\gamma}_k^{EX}(\omega)$	0,280	0,510	0,700	0,860	0,950	1,000	
Summe							11463

Die ungewöhnlich hohe Realisation des aktuellen Schadenstandes $S_{4,1}$ wirkt sich extrem auf die Prädiktoren der nicht beobachtbaren Schadenstände des Anfalljahres 4 und auf die Reserve aus.

Die loss–development Prädiktoren können auch in der Form

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}) = S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma})$$

dargestellt werden. Mit

$$\widehat{\alpha}_i^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}) := \widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma})$$

ergibt sich dann

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}) = S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i^{\text{LD}}(\widehat{\gamma})$$

und mit

$$\widehat{\alpha}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}) := (\widehat{\alpha}_0^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}), \widehat{\alpha}_1^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}), \dots, \widehat{\alpha}_n^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}))$$

erhält man

$$\widehat{S}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}) = \widehat{S}^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}))$$

Daher stimmt das loss–development Verfahren bezüglich $\widehat{\gamma}$ mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren bezüglich $\widehat{\gamma}$ und $\widehat{\alpha}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma})$ überein.

Das chain–ladder Verfahren

Das *chain–ladder Verfahren* beruht auf der Annahme, dass es einen Parametervektor

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

gibt mit

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dann ist φ ein Abwicklungsmuster für Faktoren und für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit $i + k \geq n$ gilt

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,n-i}] \prod_{l=n-i+1}^k \varphi_l$$

Die *chain–ladder Prädiktoren* der Schadenstände $S_{i,k}$ mit $i + k \geq n$ sind durch die chain–ladder Schätzer

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}}$$

der erwarteten Schadenstände $E[S_{i,k}]$ definiert, wobei

$$\hat{\varphi}_k^{\text{CL}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \hat{\varphi}_{j,k}$$

der *chain-ladder Faktor* des Abwicklungsjahres k ist. Wir bezeichnen mit

$$\hat{\mathbf{S}}^{\text{CL}} := (\hat{S}_{i,k}^{\text{CL}})_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \geq n}$$

das Dreieck aller chain-ladder Prädiktoren.

14.3.3 Beispiel. Beim chain-ladder Verfahren werden aufgrund der Berechnung der chain-ladder Faktoren alle beobachtbaren Schadenstände verwendet:

Anfall-jahr i	Abwicklungsjahr k						Reserve
	0	1	2	3	4	5	
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483	0
1	1113	2103	2774	3422	3844	4015	171
2	1265	2433	3233	3977	4454	4652	675
3	1490	2873	3880	4781	5354	5592	1712
4	1725	4261	5662	6976	7813	8160	3899
5	1889	3875	5148	6344	7105	7420	5531
$\hat{\varphi}_k^{\text{CL}}(\omega)$	2,051 1,329 1,232 1,120 1,044						
Summe							11988

Die ungewöhnlich hohe Realisation des aktuellen Schadenstandes $S_{4,1}$ wirkt sich extrem auf die Prädiktoren der nicht beobachtbaren Schadenstände des Anfalljahres 4 aus und sie wirkt sich darüber hinaus über den chain-ladder Faktor $\hat{\varphi}_1^{\text{CL}}$ auch auf die Prädiktoren der nicht beobachtbaren Schadenstände des Anfalljahres 5 aus; dies gilt auch für die Reserven.

Wegen

$$\hat{\gamma}_k^{\text{CL}} = \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\text{CL}}}$$

können die chain-ladder Prädiktoren auch in der Form

$$\hat{S}_{i,k}^{\text{CL}} = \hat{\gamma}_k^{\text{CL}} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\text{CL}}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{\text{CL}} - \hat{\gamma}_{n-i}^{\text{CL}}) \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\text{CL}}}$$

dargestellt werden und man erhält

$$\hat{\mathbf{S}}^{\text{CL}} = \hat{\mathbf{S}}^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{CL}}) = \hat{\mathbf{S}}^{\text{BF}}(\hat{\gamma}^{\text{CL}}, \hat{\alpha}^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{CL}}))$$

Daher stimmt das chain-ladder Verfahren mit dem loss-development Verfahren bezüglich $\hat{\gamma}^{\text{CL}}$ und mit dem Bornhuetter-Ferguson Verfahren bezüglich $\hat{\gamma}^{\text{CL}}$ und $\hat{\alpha}^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{CL}})$ überein.

Durch Veränderung der Gewichte in der Definition der chain–ladder Faktoren erhält man Varianten des chain–ladder Verfahrens, die wiederum Versionen des loss–development Verfahrens und damit auch des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens sind.

Das Cape–Cod Verfahren

Das *Cape–Cod Verfahren* beruht auf der Annahme, dass es einen Parametervektor

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

gibt mit

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, und dass es einen Vektor

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$$

von bekannten Volumenmaßen der Anfalljahre sowie einen Parameter κ gibt mit

$$\kappa = E\left[\frac{S_{i,n}}{\pi_i}\right]$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dann ist $\boldsymbol{\gamma}$ ein Abwicklungsmuster für Quoten und κ ist die allen Anfalljahren gemeinsame *Endschadenquote*, und es gilt

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,n-i}] + (\gamma_k - \gamma_{n-i}) \pi_i \kappa$$

Für einen beliebigen Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$$

des Abwicklungsmusters für Quoten sind die *Cape–Cod Prädiktoren* der Schadenstände $S_{i,k}$ mit $i + k \geq n$ definiert als

$$\hat{S}_{i,k}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \pi_i \hat{\kappa}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \hat{\boldsymbol{\gamma}})$$

wobei

$$\hat{\kappa}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) := \frac{\sum_{j=0}^n S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^n \pi_j \hat{\gamma}_{n-j}} = \sum_{j=0}^n \frac{\pi_j \hat{\gamma}_{n-j}}{\sum_{h=0}^n \pi_h \hat{\gamma}_{n-h}} \frac{S_{j,n-j}}{\pi_j \hat{\gamma}_{n-j}}$$

ein Schätzer der Endschadenquote κ ist, der als *Cape–Cod Endschadenquote* bezeichnet wird. Die Cape–Cod Prädiktoren sind invariant unter einer Skalierung des Volumenmaßes $\boldsymbol{\pi}$ mit einem Faktor $c \in (0, \infty)$. Wir bezeichnen mit

$$\hat{\mathbf{S}}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) := (\hat{S}_{i,k}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}))_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \geq n}$$

das Dreieck aller Cape–Cod Prädiktoren.

14.3.4 Beispiel. Beim Cape–Cod Verfahren mit externen Schätzern des Abwicklungsmusters werden nur die aktuellen Schadenstände verwendet:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						π_i	$\pi_i \widehat{\gamma}_{n-i}^{\text{EX}}(\omega)$	Reserve
	0	1	2	3	4	5			
0						3483	4025	4025	0
1					3844	4052	4456	4233	208
2				3977	4424	4672	5315	4571	695
3			3880	4775	5278	5557	5986	4190	1677
4		4261	5492	6529	7113	7437	6939	3539	3176
5	1889	3641	5089	6308	6994	7375	8158	2284	5486
$\widehat{\gamma}_k^{\text{EX}}(\omega)$	0,280	0,510	0,700	0,860	0,950	1,000			
Summe									11242

Dabei ergibt sich für die Realisation der Cape–Cod Endschatenquote

$$\widehat{\kappa}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}})(\omega) \approx \frac{3483 + 3844 + 3977 + 3880 + 4261 + 1889}{4025 + 4233 + 4571 + 4190 + 3539 + 2284} \approx 0,934$$

Die Auswirkung der ungewöhnlich hohen Realisation des aktuellen Schadenstandes $S_{4,1}$ auf die Prädiktoren der nicht beobachtbaren Schadenstände des Anfalljahres 4 ist gering, aber es bestehen über die Cape–Cod Endschatenquote Auswirkungen auf die anderen Anfalljahre; entsprechendes gilt für die Reserven.

Mit

$$\widehat{\alpha}_i^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) := \pi_i \widehat{\kappa}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}})$$

können die Cape–Cod Prädiktoren auch in der Form

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) = S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}})$$

dargestellt werden und mit

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) := (\widehat{\alpha}_0^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}), \widehat{\alpha}_1^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}), \dots, \widehat{\alpha}_n^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}))$$

ergibt sich dann

$$\widehat{\mathbf{S}}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) = \widehat{\mathbf{S}}^{\text{BF}}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}))$$

Daher stimmt das Cape–Cod Verfahren bezüglich $\boldsymbol{\pi}$ und $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren bezüglich $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ und $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}})$ überein.

Durch Veränderung der Gewichte in der Definition der Cape–Cod Endschatenquote erhält man Varianten des Cape–Cod Verfahrens, die wiederum Versionen des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens sind.

Das additive Verfahren

Das *additive Verfahren*, das auch als *Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse* bezeichnet wird, beruht auf der Annahme, dass es einen Vektor

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$$

von bekannten Volumenmaßen der Anfalljahre und einen Parametervektor

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\pi}) = (\zeta_0(\boldsymbol{\pi}), \zeta_1(\boldsymbol{\pi}), \dots, \zeta_n(\boldsymbol{\pi}))$$

gibt mit

$$\zeta_k(\boldsymbol{\pi}) = E\left[\frac{Z_{i,k}}{\pi_i}\right]$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dann ist $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\pi})$ ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse und für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit $i + k \geq n$ gilt

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,n-i}] + \pi_i \sum_{l=n-i+1}^k \zeta_l(\boldsymbol{\pi})$$

Die *additiven Prädiktoren* der Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $i + k \geq n$ sind definiert als

$$\widehat{Z}_{i,k}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := \pi_i \widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$$

und die *additiven Prädiktoren* der Schadenstände $S_{i,k}$ mit $i + k \geq n$ sind definiert als

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := S_{i,n-i} + \pi_i \sum_{l=n-i+1}^k \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$$

wobei

$$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j}$$

der *additive Schadenquotenzuwachs* des Abwicklungsjahres k ist. Die additiven Prädiktoren sind invariant unter einer Skalierung des Volumenmaßes $\boldsymbol{\pi}$ mit einem Faktor $c \in (0, \infty)$. Wir bezeichnen mit

$$\widehat{\mathbf{S}}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := (\widehat{S}_{i,k}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}, i+k \geq n}$$

das Dreieck aller additiven Prädiktoren.

14.3.5 Beispiel. Beim additiven Verfahren werden aufgrund der Berechnung der additiven Schadenquotenzuwächse alle beobachtbaren Schadenstände verwendet. Außerdem ist anstelle des Abwicklungsdreiecks für Schadenstände

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	4261				
5	1889					

das Abwicklungsdreieck für Zuwächse zu verwenden:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						π_i
	0	1	2	3	4	5	
0	1001	854	568	565	347	148	4025
1	1113	990	671	648	422	164	4456
2	1265	1168	800	744	482	195	5315
3	1490	1383	1007	849	543	220	5986
4	1725	2536	1068	984	629	255	6939
5	1889	2116	1256	1157	740	300	8158
$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})(\omega)$	0,243	0,259	0,154	0,142	0,091	0,037	

Aus den additiven Prädiktoren der Zuwächse ergeben sich nun durch Summation die additiven Prädiktoren der Schadenstände:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						Reserve
	0	1	2	3	4	5	
0						3483	0
1					3844	4008	164
2				3977	4459	4654	677
3			3880	4729	5272	5492	1612
4		4261	5329	6313	6942	7197	2936
5	1889	4005	5261	6418	7158	7458	5569
Summe							10958

Die Auswirkung der ungewöhnlich hohen Realisation des aktuellen Schadenstandes $S_{4,1}$ auf die Prädiktoren der nicht beobachtbaren Schadenstände des Anfalljahres 4 ist gering, aber es besteht über den additiven Schadenquotenzuwachs $\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$ eine Auswirkung auf die Prädiktoren der nicht beobachtbaren Schadenstände des Anfalljahres 5; entsprechendes gilt für die Reserven.

Wegen

$$\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) = \frac{\sum_{l=0}^k \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})}{\sum_{l=0}^n \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})}$$

können die additiven Prädiktoren mit

$$\widehat{\alpha}_i^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := \pi_i \sum_{l=0}^n \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$$

in der Form

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) = S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) - \widehat{\gamma}_{n-i}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})) \widehat{\alpha}_i^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$$

dargestellt werden, und mit

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) &:= (\widehat{\gamma}_0^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \widehat{\gamma}_1^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \dots, \widehat{\gamma}_n^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})) \\ \widehat{\alpha}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) &:= (\widehat{\alpha}_0^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \widehat{\alpha}_1^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \dots, \widehat{\alpha}_n^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})) \end{aligned}$$

erhält man

$$\widehat{\mathbf{S}}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) = \widehat{\mathbf{S}}^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \widehat{\alpha}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))$$

Daher stimmt das additive Verfahren bezüglich $\boldsymbol{\pi}$ mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren bezüglich $\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$ und $\widehat{\alpha}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$ überein. Darüber hinaus gilt das folgende Lemma:

14.3.6 Lemma. *Es gilt*

$$\widehat{\alpha}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) = \widehat{\alpha}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))$$

Beweis. Aus den Definitionen von $\widehat{\zeta}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$ und $\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=0}^n \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \right) \left(\sum_{j=0}^n \pi_j \widehat{\gamma}_{n-j}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \right) &= \sum_{j=0}^n \pi_j \widehat{\gamma}_{n-j}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \sum_{l=0}^n \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \\ &= \sum_{j=0}^n \pi_j \sum_{l=0}^{n-j} \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \\ &= \sum_{l=0}^n \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \sum_{j=0}^{n-l} \pi_j \\ &= \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^{n-l} Z_{j,l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{n-j} Z_{j,l} \\
&= \sum_{j=0}^n S_{j,n-j}
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_i^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) &= \pi_i \sum_{l=0}^n \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \\
&= \pi_i \frac{\sum_{j=0}^n S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^n \pi_j \widehat{\gamma}_{n-j}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})} \\
&= \pi_i \widehat{\kappa}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})) \\
&= \widehat{\alpha}_i^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma gezeigt. \square

Aus dem Lemma ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{S}}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) &= \widehat{\mathbf{S}}^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \widehat{\alpha}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})) \\
&= \widehat{\mathbf{S}}^{\text{BF}}(\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \widehat{\alpha}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))) \\
&= \widehat{\mathbf{S}}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}))
\end{aligned}$$

Daher stimmt das additive Verfahren bezüglich $\boldsymbol{\pi}$ auch mit dem Cape-Cod Verfahren bezüglich $\boldsymbol{\pi}$ und $\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$ überein.

Durch Veränderung der Gewichte in der Definition der additiven Schadenquotenzuwächse erhält man Varianten des additiven Verfahrens, die wiederum Versionen des Bornhuetter-Ferguson Verfahrens sind.

Aufgaben

14.3.A Berechnen Sie in den Beispielen 14.3.1, 14.3.2 und 14.3.4 die Realisationen der nicht beobachtbaren Schadenstände für den Fall, dass die externen Schätzer der Quoten durch die chain-ladder Quoten bzw. die additiven Quoten ersetzt werden. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

14.3.B Iteriertes Bornhuetter-Ferguson Verfahren: Das Bornhuetter-Ferguson Verfahren lässt sich wie folgt iterieren: für alle $m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\widehat{S}_{i,k}^{(m)} := \begin{cases} S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i & \text{falls } m = 0 \\ S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{S}_{i,n}^{(m-1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\widehat{S}_{i,k}^{(m)} = \left(1 - (1 - \widehat{\gamma}_{n-i})^m\right) \widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i})^m \widehat{S}_{i,k}^{\text{BF}}$$

Insbesondere gilt im Fall $0 < \widehat{\gamma}_{n-i} < 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{S}_{i,k}^{(m)} = \widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}}$$

und die Konvergenz ist monoton.

14.3.C Cape–Cod Verfahren: Für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ sei

$$T_{i,n-i} := \widehat{\gamma}_{n-i} \pi_i \widehat{\kappa}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma})$$

$$X_{i,n-i} := S_{i,n-i} - T_{i,n-i}$$

Dann gilt für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit $i + k \geq n$

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma}) = \widehat{T}_{i,k}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}) + X_{i,n-i}$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

14.4 Vergleich

Die folgende Tabelle vergleicht die Basisverfahren als Versionen des (erweiterten) Bornhuetter–Ferguson Verfahrens bezüglich des verwendeten Schätzers $\widehat{\gamma}$ des Abwicklungsmusters für Quoten und des verwendeten a–priori Schätzers $\widehat{\alpha}$ der erwarteten Endschadenstände:

a–priori erwartete Endschadenstände	Quoten		
	$\widehat{\gamma}^{\text{EX}}$	$\widehat{\gamma}^{\text{CL}}$	$\widehat{\gamma}^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$
$\widehat{\alpha}^{\text{EX}}$	Bornhuetter–Ferguson Verfahren (extern)		
$\widehat{\alpha}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma})$	loss–development Verfahren (extern)	chain–ladder Verfahren	
$\widehat{\alpha}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma})$	Cape–Cod Verfahren (extern)		additives Verfahren

Die Tabelle ist in dem Sinne zu verstehen, dass die Schätzer des Abwicklungsmusters für Quoten auch bei der Spezifizierung der a–priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände verwendet werden. Beispielsweise ist

- das chain–ladder Verfahren das Bornhuetter–Ferguson Verfahren bezüglich der Schätzer $\widehat{\gamma}^{\text{CL}}$ und $\widehat{\alpha}^{\text{LD}}(\widehat{\gamma}^{\text{CL}})$, und
- das additive Verfahren das Bornhuetter–Ferguson Verfahren bezüglich der Schätzer $\widehat{\gamma}^{\text{AD}}$ und $\widehat{\alpha}^{\text{CC}}(\boldsymbol{\pi}, \widehat{\gamma}^{\text{AD}})$.

Die hier betrachteten Schätzer für das Abwicklungsmuster sind Beispiele für die Verwendung externer, interner, oder gemischter Information.

Neben dem systematischen Vergleich der Basisverfahren zeigt die Tabelle die Möglichkeit, durch andere Kombinationen von Schätzern weitere Versionen des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens zu gewinnen.

Alle Versionen des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens besitzen dieselbe formale Struktur und können daher als eine Familie von Verfahren aufgefasst werden. Sie unterscheiden sich nur

- in der Art der verwendeten Information und
- in der Art, wie diese Information in die Schätzer des Abwicklungsmusters und in die a-priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände einfließt.

Es liegt daher nahe, für ein gegebenes Abwicklungsdreieck

- mehrere Versionen des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens anzuwenden,
- die so erhaltenen Prädiktoren zu vergleichen, und
- schließlich eine Auswahl unter den Prädiktoren zu treffen.

Dieses *Bornhuetter–Ferguson Prinzip* lässt sich im Grunde genommen auch als ein eigenständiges Verfahren der Schadenreservierung verstehen, das eine vorzeitige Festlegung auf ein spezielles Verfahren vermeidet und bei jeder einzelnen Anwendung an die Verfügbarkeit und Glaubwürdigkeit verschiedener Quellen der Information angepasst werden kann.

Das folgende Beispiel veranschaulicht die Anwendung des Bornhuetter–Ferguson Prinzips:

14.4.1 Beispiel. Die folgende Tabelle enthält

- die Realisation eines Abwicklungsdreiecks für Schadenstände $S_{i,k}$,
- Volumenmaße π_i der Anfalljahre,
- Realisationen der a-priori Schätzer $\hat{\alpha}_i^{\text{EX}}$ der erwarteten Endschadenstände, und
- Realisationen der Schätzer $\hat{\gamma}_k^{\text{EX}}$ der Quoten,

wobei alle $\hat{\alpha}_i^{\text{EX}}$ und $\hat{\gamma}_k^{\text{EX}}$ auf externer Information beruhen:

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr k						π_i	$\hat{\alpha}_i^{\text{EX}}(\omega)$
	0	1	2	3	4	5		
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483	4025	3517
1	1113	2103	2774	3422	3844		4456	3981
2	1265	2433	3233	3977			5315	4598
3	1490	2873	3880				5986	5658
4	1725	4261					6939	6214
5	1889						8158	6325
$\hat{\gamma}_k^{\text{EX}}(\omega)$	0,280	0,510	0,700	0,860	0,950	1,000		

Die folgende Tabelle zeigt die Realisationen der Schätzer der Quoten, die in den verschiedenen Versionen des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens verwendet werden:

Quote	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
$\hat{\gamma}_k^{\text{EX}}(\omega)$	0,280	0,510	0,700	0,860	0,950	1,000
$\hat{\gamma}_k^{\text{CL}}(\omega)$	0,255	0,522	0,694	0,855	0,958	1,000
$\hat{\gamma}_k^{\text{AD}}(\pi)(\omega)$	0,263	0,543	0,709	0,862	0,960	1,000

Die folgende Tabelle zeigt für die hier betrachteten Versionen des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens die Realisationen der a–priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände:

	a–priori erwarteter Endschadenstand	Quoten	Anfalljahr i					
			0	1	2	3	4	5
V11	$\hat{\alpha}_i^{\text{EX}}(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{EX}}$	3517	3981	4598	5658	6214	6325
V12	$\hat{\alpha}_i^{\text{EX}}(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{CL}}$	3517	3981	4598	5658	6214	6325
V13	$\hat{\alpha}_i^{\text{EX}}(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi)$	3517	3981	4598	5658	6214	6325
V21	$\hat{\alpha}_i^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{EX}})(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{EX}}$	3483	4046	4624	5543	8355	6746
V22	$\hat{\alpha}_i^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{CL}})(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{CL}}$	3483	4015	4652	5592	8160	7420
V23	$\hat{\alpha}_i^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi))(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi)$	3483	4003	4612	5471	7850	7191
V31	$\hat{\alpha}_i^{\text{CC}}(\pi, \hat{\gamma}^{\text{EX}})(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{EX}}$	3759	4162	4964	5591	6481	7619
V32	$\hat{\alpha}_i^{\text{CC}}(\pi, \hat{\gamma}^{\text{CL}})(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{CL}}$	3785	4190	4998	5628	6524	7671
V33	$\hat{\alpha}_i^{\text{CC}}(\pi, \hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi))(\omega)$	$\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi)$	3727	4126	4921	5542	6425	7553

Aufgrund der ungewöhnlich hohen Realisation des Schadenstandes $S_{4,1}$ ist bei den drei Versionen des loss–development Verfahrens auch die Realisation des a–priori Schätzers des erwarteten Endschadenstandes des Anfalljahres 4 ungewöhnlich hoch. Die folgende Tabelle zeigt die Realisationen der Reserven

$$R_{(6)}^{\text{BF}}(\alpha, \gamma) := \sum_{i=1}^5 \left(\hat{S}_{i,5-i+1}^{\text{BF}}(\alpha, \gamma) - S_{i,5-i} \right)$$

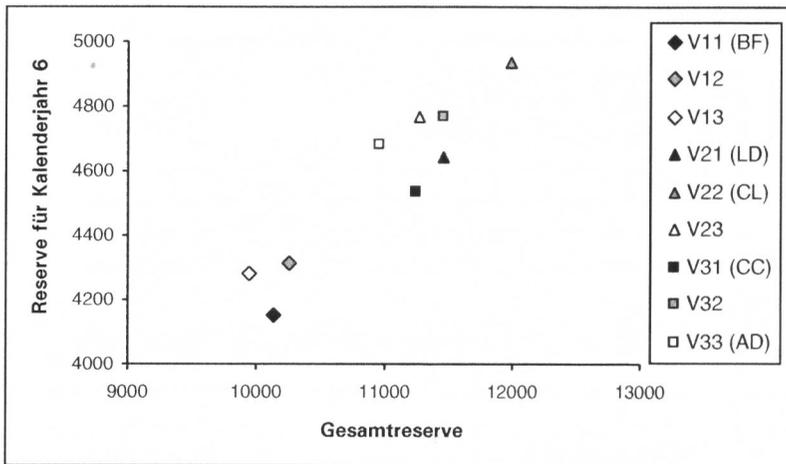
für das erste nicht beobachtbare Kalenderjahr und der Gesamtreserven

$$R^{\text{BF}}(\alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^5 \left(\hat{S}_{i,5}^{\text{BF}}(\alpha, \gamma) - S_{i,5-i} \right)$$

für die verschiedenen Versionen des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens:

	a–priori erwartete Endschadenstände	Quoten	Reserve für Kalenderjahr 6	Gesamt- reserve
V11	$\hat{\alpha}^{\text{EX}}$	$\hat{\gamma}^{\text{EX}}$	4154	10139
V12	$\hat{\alpha}^{\text{EX}}$	$\hat{\gamma}^{\text{CL}}$	4312	10252
V13	$\hat{\alpha}^{\text{EX}}$	$\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi)$	4281	9941
V21	$\hat{\alpha}^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{EX}})$	$\hat{\gamma}^{\text{EX}}$	4644	11463
V22	$\hat{\alpha}^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{CL}})$	$\hat{\gamma}^{\text{CL}}$	4935	11988
V23	$\hat{\alpha}^{\text{LD}}(\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi))$	$\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi)$	4769	11276
V31	$\hat{\alpha}^{\text{CC}}(\pi, \hat{\gamma}^{\text{EX}})$	$\hat{\gamma}^{\text{EX}}$	4533	11242
V32	$\hat{\alpha}^{\text{CC}}(\pi, \hat{\gamma}^{\text{CL}})$	$\hat{\gamma}^{\text{CL}}$	4770	11461
V33	$\hat{\alpha}^{\text{CC}}(\pi, \hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi))$	$\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi)$	4679	10958
	Minimum		4154	9941
	Maximum		4935	11988
	Minimum / Maximum		84%	83%

Das folgende Diagramm stellt diese Paare von Reserven dar:



Das Diagramm deutet auf eine starke positive Korrelation zwischen der Reserve für das erste nicht beobachtbare Kalenderjahr 6 und der Gesamtreserve hin. Darüber hinaus ergeben sich die folgenden Beobachtungen:

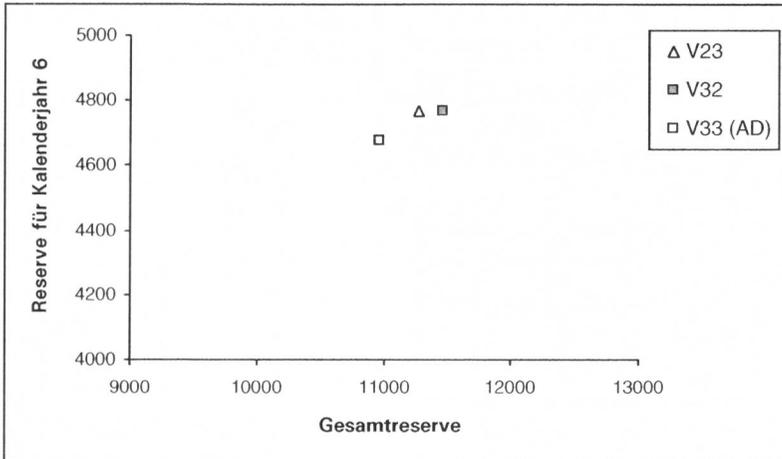
- Beide Reserven sind niedrig für die Versionen V11, V12, V13, die externe a-priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände verwenden.
- Die Reserve für Kalenderjahr 6 ist relativ niedrig für die Versionen V11, V21, V31, die externe Schätzer der Quoten verwenden.
- Beide Reserven sind relativ hoch für die Versionen V12, V22, V32, die die chain-ladder Quoten verwenden; die Ursache hierfür ist die ungewöhnlich hohe Realisation des Schadenstandes $S_{4,1}$.
- Beide Reserven sind hoch für die Version V22 (chain-ladder Verfahren).

Allgemein besteht eine hohe Volatilität zwischen den Paaren von Reserven, die sich aus den verschiedenen Versionen des Bornhuetter-Ferguson Verfahrens ergeben.

An dieser Stelle ist eine aktuarielle Beurteilung der den Reserven zugrundeliegenden Prädiktoren erforderlich, um zu einer Wahl von Prädiktoren zu gelangen, die verlässliche Reserven liefern.

- Wenn die Daten des Abwicklungsdreiecks als zuverlässig beurteilt werden, könnten die Prädiktoren, die auf externen a-priori Schätzern der Endschadenstände beruhen und zu niedrigen Reserven führen, ausgeschlossen werden.
- Wenn die Daten des Abwicklungsdreiecks als zuverlässig beurteilt werden, könnten auch die die Prädiktoren, die auf externen Schätzern der Quoten beruhen und zu relativ niedrigen Reserven führen, ausgeschlossen werden.
- Da die chain-ladder Reserven extrem hoch ausfallen, könnten die chain-ladder Prädiktoren ebenfalls ausgeschlossen werden, wenn man davon ausgehen kann, dass die ungewöhnlich hohe Realisation des Schadenstandes $S_{4,1}$ ein Ausreißer ist und nicht auf eine Besonderheit des Anfalljahres 4 hindeutet.

Die verbleibenden Paare von Reserven weisen eine sehr geringe Volatilität auf: Bei der Reserve für das erste nicht beobachtbare Kalenderjahr 6 liegt das Minimum bei 98% des Maximums, und bei der Gesamtreserve liegt das Minimum bei 96% des Maximums. Diese Paare von Reserven könnten als verlässlich eingeschätzt werden.



Es bleibt das Problem, unter den verbleibenden Prädiktoren eine Wahl zu treffen. Wenn beispielsweise besonders sichere Reserven gewünscht werden, könnte man die Prädiktoren der Version V32 (Cape–Cod Verfahren mit chain–ladder Quoten) auswählen.

Das Bornhuetter–Ferguson Prinzip kann, neben der Bestimmung verlässlicher Prädiktoren und Reserven, auch dazu verwendet werden, ein Abwicklungsdreieck und damit einen Bestand von Risiken zu analysieren. Wir erwähnen hier nur zwei Möglichkeiten einer derartigen Analyse:

- Wenn die Prädiktoren, die auf externen Schätzern der Quoten auf der Grundlage einer Marktstatistik beruhen, von den anderen Prädiktoren deutlich abweichen, liegt die Vermutung nahe, dass der Bestand eine andere Struktur aufweist als der Bestand des gesamten Marktes.
- Wenn die Prädiktoren, die auf Prämien als Volumenmaß beruhen, von den anderen Prädiktoren deutlich abweichen, liegt die Vermutung nahe, dass die Tarifierung nicht angemessen war.

14.5 Bemerkungen

Neben den in diesem Kapitel behandelten Basisverfahren können auch andere Verfahren der Schadenreservierung als Versionen des (erweiterten) Bornhuetter–Ferguson Verfahrens dargestellt werden; vgl. Schmidt und Zocher [2008].

Die Grundlage für die Entwicklung des Bornhuetter–Ferguson Prinzips wurde in Radtke und Schmidt [2004] gelegt, indem die Basisverfahren in einheitlicher Notation dargestellt und als Versionen des (erweiterten) Bornhuetter–Ferguson Verfahrens interpretiert wurden; vgl. Schmidt [2006a] und Stienen et al. [2008]. In umfassender Form wurde das Bornhuetter–Ferguson Prinzip in Schmidt und Zocher [2008] dargestellt.

In den letzten Jahren wurden auch multivariate Erweiterungen des chain-ladder Verfahrens und des additiven Verfahrens entwickelt, die Korrelationen zwischen den Teilbeständen eines Gesamtbestandes berücksichtigen; vgl. Braun [2004], Pröhl und Schmidt [2005], Hess, Schmidt und Zocher [2006] sowie Schmidt [2006b].

Ausgangspunkt für die Entwicklung multivariater Verfahren der Schadenreservierung ist die Arbeit von Quarg und Mack [2004] über das paid & incurred Problem, das darin besteht, dass die Prädiktoren der Endschadenstände, die auf der Basis von Schadenzahlungen bzw. auf der Basis von Schadenaufwänden gewonnen werden, im allgemeinen nicht übereinstimmen; vgl. Halliwell [1997] sowie Kloberdanz und Schmidt [2009].

Für weitere Aspekte der Schadenreservierung verweisen wir auf Mack [1997], Taylor [2000], Radtke und Schmidt [2004] sowie Wüthrich und Merz [2008].

Die Schadenreservierung stellt ein besonders vielschichtiges Problem der Versicherungswissenschaft dar, bei dem nicht nur mathematische, sondern vor allem auch rechtliche Aspekte zu berücksichtigen sind. Eine Darstellung der nichtmathematischen Aspekte am Beispiel der Haftpflichtversicherung, die sich durch eine besonders lange Abwicklungsdauer auszeichnet, findet man bei Schmidt-Salzer [1984].